Département de Mathématiques 2018/2019
Module: Analyse numérique 1
Fiche de T.D. N°1

Notions d'erreurs

Exercice 1

Utiliser le développement de Taylor de $\sin x$ pour approximer $\sin(3.0)$ avec une précision de 10^{-4}.

Exercice 2

Soit $f(x) = (1-x)^{-1}$ et $x_0 = 0$. Trouver le polynôme de Taylor $p_n(x)$ de degré n de la fonction $f(x)$ au voisinage de x_0. Quelle est la valeur de n nécessaire pour approcher $f(x)$ à 10^{-6} près sur $[0, 0.5]$?

Exercice 3

On considère l'expression:

$x = ((((((0.1\times10^0+0.1\times10^{-3})+0.4\times10^{-3})+0.2\times10^{-3})+0.1\times10^{-3})+0.2\times10^{-3})+0.1\times10^{-3})$

1. Calculer la valeur de x en arithmétique exacte, puis en arithmétique flottante à 3 chiffres avec arrondi, en respectant l'ordre préscrit par les parenthèses. Expliquer la différence entre les résultats. Déterminer l'erreur relative.
2. Proposer une modification de l'ordre de sommation qui permette d'obtenir une réponse plus précise en arithmétique flottante à 3 chiffres. Justifier votre réponse en calculant de nouveau l'erreur relative.

Exercice 4

On veut calculer $f(x) = \sqrt{x^4+4} - 2$ pour x proche de 0.

1. Montrer, en utilisant une arithmétique flottante à 3 chiffres avec arrondi, qu'un calcul direct de $f(0.5)$ engendre une erreur relative importante. Expliquer pourquoi?
2. Proposer une autre formule pour $f(x)$ qui garantirait un meilleur comportement vis à vis des erreurs d'arrondi. Puis évaluer $f(0.5)$ à partir de votre formule et calculer l'erreur relative correspondante.

Exercice supplémentaire

La fonction d'erreur de Gauss est définie par $\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$. La fonction erf intervient régulièrement dans le domaine des probabilités et statistiques. On désire approcher la valeur $\mathrm{erf}(x)$ dans l'intervalle $[-1, 1]$ avec une erreur toujours inférieure à 10^{-10}.

1. Donner la valeur exacte de $\mathrm{erf}(0)$.
2. Utiliser un développement de Taylor de e^u pour déterminer les n premiers termes non nuls du développement de Taylor de e^{-t^2}.
3. En déduire les n premiers termes non nuls du développement de Taylor de $\mathrm{erf}(x)$.
4. Préciser de manière analytique le reste du developpement de Taylor.
5. Donner la valeur minimale de n pour que l'erreur de l'approximation de la fonction erf soit toujours inférieure à 10^{-10} pour $x \in [-1, 1]$.

Bibliographie du cours analyse numérique

André Fortin, Analyse numérique pour ingénieurs, Presses Polytechnique De Montréal, 2008.
Jean-Pierre Demailly, Analyse numérique et équations différentielles, OPU, 1994.
Richard L. Burden and J. Douglas Faires, Numerical Analysis, Ninth Edition, Brooks/Cole, Cengage Learning, 2011.
M. Fellah, N.H. Allal , Exercices corrigés en analyse numérique élémentaire, OPU, 2005.
Alfio Quarteroni, Riccardo Sacco, Fausto Saleri, Méthodes Numériques, Algorithmes, analyse et applications, Springer, 2007.

Département de Mathématiques 2018/2019
Module: Analyse numérique 1
Fiche de T.D. N°2

Résolution des équations non linéaires.

Exercice 1

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par:

$$\varphi(x) = \frac{x}{1-\ln x}, \forall x > 0; \varphi(0) = 0 \text{ et } b = e^{(1-\sqrt{5})/2}.$$

Le théorème du point fixe est-il applicable à la fonction φ sur $[0, b]$?

Exercice 2

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1, x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une racine réelle α et une seule dans tout $\mathbb{R}$ et que cette racine est localisée dans l'intervalle $[3, 4]$.

2. Quel est le nombre n_1 d'itérations nécessaires à effectuer par la méthode de bissection pour obtenir une approximation de α à 10^{-6} près.

Soit $g(x) = \left(1 + 3x^2\right)^{1/3}, x \in [3, 4]$

3. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_{n+1} = g(x_n)$ converge t-elle vers α pour tout $x_0 \in [3, 4]$.

4. Quel est le nombre n_2 d'itérations nécessaires à effectuer par l'itération $x_{n+1} = g(x_n)$ pour obtenir une approximation de α à 10^{-6} près à partir de $x_0 = 3$.

Exercice 3

On considère la fonction $f(x) = e^x - 4x^2$.

1. Montrer qu'il existe un zéro α pour la fonction f dans $[4, 5]$ et qu'il est unique.

2. Montrer que la méthode du point fixe $x = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$ ne converge pas vers α.

3. Déterminer une méthode de point fixe qui converge vers α. Justifier.

4. Cette équation admet aussi une racine entre $x = 0$ et $x = 1$.Montrer que la méthode du point fixe $x = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$ converge vers cette racine si x_0 est choisi dans l'intervalle $[0, 1]$.

Exercice 4

1. Quel est l'ordre de convergence de la suite $x_n = 10^{-2^n}$ vers 0?

2. Montrer que la suite $x_n = 10^{-n^k}$ ne converge pas quadratiquement vers 0.

3. Construire une suite qui converge vers 0 à l'ordre 3.

4. Construire une suite qui converge vers 0 à l'ordre α avec $\alpha > 1$.

Exercice 5

La suite $x_n = \dfrac{1}{n!}$ converge vers 0 quand n tend vers ∞.

1. Montrer que la suite ne converge pas linéairement vers 0.

2. Montrer que la suite ne converge pas quadratiquement vers 0.

3. Que peut-on dire sur l'ordre de convergence de cette suite?

Exercice supplémentaire

Pour approcher $\sqrt{2}$, on considère l'equation $x^2 = 2$ et on définit la méthode du point fixe $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$.

1) Montrer que:$\forall\ x_0 \in [1, 2]$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, converge vers $\sqrt{2}$.

2) Estimer le nombre d'itérations nécessaires pour évaluer $\sqrt{2}$ à partir de $x_0 = 1$ avec une précision de 10^{-100}.