Université de Tlemcen
Département de Mathématiques Analyse III . A.U 18/19
L2MATH

Série n°4

Intégrales impropres

Exercice 1 : Etudier la nature des intégrales impropres suivantes :

1. $\int_1^{+\infty} e^{-2\sqrt{lnx}}\,dx$ 2. $\int_2^{+\infty} \frac{|cosx|\ dx}{1+\sqrt{x}}$ 3. $\int_2^{+\infty} ln\left(1+\frac{sin^2x}{x^\alpha}\right)\,dx\ \alpha>0$ 4. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2dt}{\left(e^{\sqrt[3]{t}}+1\right)(e^{-2t}+1)}$

5. $\int_0^{+\infty} \sqrt{x^4+1}-x\sqrt[3]{x^3-2}\,dx$ 6. $\int_0^{+\infty}\frac{1}{e^x-1}dx$ 7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt[4]{1-cosx}}{\sqrt[3]{sinx-sin^2x}}dx$ 8. $\int_0^1\ cos^2\left(\frac{1}{t}\right)dt$ 9. $\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{\sqrt[3]{tanx(1-tanx)}}$. 10. $\int_1^{+\infty}\frac{|sinx|\ dx}{\sqrt{x^2-x}}$. 11. $\int_0^{+\infty}\frac{arctan\alpha x}{x}dx$

12. $\int_1^3\ \frac{dx}{\sqrt{|ln^2x-1|}}$. 13. $\int_0^{\pi/2}(cos^\alpha x)\ \left(sin^\beta x\right)dx$ α, β ϵR 13. $\int_0^1\ ln\,(1-cht^\alpha)dt\ \alpha>0$

(Supp) 1. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{\left(e^{-t^3}+5\right)\left(e^{t^2}+2\right)}$ 2 . $\int_0^{+\infty}\frac{x}{\sqrt{e^x-1}}dx$ 3 . $\int_0^{+\infty}\frac{cos\alpha x}{x}dx$

4 . $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-3x}-e^{-5x}}{x}dx$ 5. $\int_1^e\frac{x}{\sqrt[4]{lnx(1-lnx)}}dx$ 6. $\int_0^{+\infty}\frac{|sin3x|\ dx}{\sqrt{(2x+1)arctanx^2}}$.

7. $\int_0^{+\infty}\ \frac{ln(1+x^\alpha)dx}{x}$ 8. $\int_0^{+\infty}\ \frac{1-cos\alpha t}{t^{3/2}}dt$ 9. $\int_0^{+\infty}\ \frac{sin^2x}{x^\alpha}dx$

10. $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{\pi-2arcsinx}}$. 11. $\int_0^1\ \frac{1}{x}\ cos\frac{1}{x}\ dx$ 12. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{arctan\alpha x}{x(1+x^2)}dx$ 13. $\int_0^{+\infty} 1+xln\left(\frac{x}{x+1}\right)dx$

Exercice 2

En quels points la fonction φ est-elle dérivable ? A l'aide de la dérivée calculer sa valeur.

1. $\varphi(\beta)=\int_0^{+\infty}\ e^{-\alpha t^2}cos\beta t\,dt\ \ \alpha>0$ 2. $\varphi(x)=\int_0^{+\infty}\ e^{-t}\ \frac{1-cosxt}{t}dt$

(supp) 3. $\varphi(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan xy}{t(1+t^2)}\ dt$ 4. $\varphi(x)=\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-(x+1)t}}{t\sqrt{t}}\ dt\ (x>-1)$

5. $\varphi(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-\alpha x}}{xe^x}\ dx\ \ \ \alpha>-1$ 6. $\varphi(x)=\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-xt}}{t^{a+1}}\ dt\ \ \ \mathbf{0}<\mathbf{a}<1.$

Exercice 3 : Montrer la convergence et calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_{-\infty}^{+\infty}\ \frac{dx}{(chx)^\alpha}\ \ \alpha>0$ 2. $\int_0^{+\infty}\frac{x^{2n+1}\,dx}{(1+x^2)^{2n+3}}$ 3 . $\int_1^{+\infty}\frac{(lnx)^{9/2}}{x^2}dx$ 4. $\int_0^{\pi/4}\frac{cos^2x\ \ (cos2x)^{3/2}\,dx}{cos^7x}$

5 . $\int_0^{+\infty}\frac{x}{2+x^4}\ dx$ 6. $\int_1^{+\infty}x^m\,(lnx)^n dx$ 7 . $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^8}\ dx$ 8. $\int_0^{\pi/2}(tanx)^\alpha\,dx\ \ |\alpha|<1$

Supp 1. $\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{-lnx}}\ dx$ 2. $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^6}$ 3. $\int_0^{\pi/2} sin^\alpha x\ dx\ \ \alpha>-1$ 4 . $\int_0^{+\infty}\sqrt{x}\,e^{-x^n}\,dx$

Exercice 04 :(supp)

1. Montrer que $\int_0^{+\infty} y\,e^{-ty}\ \ dt$ converge pour y∈ [0,1].

2. Cette convergence est-elle uniforme? $(justifier)$

Exercice 05 :

Montrer en utilisant la fonction Gamma la formule de stirling.

Exercice 06 :

Soit $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\ dt$ et $G(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{(1+t^2)}\ dt\ x \in \mathbb{R}^+$

Montrer que F et G sont dérivable dans $\mathbb{R}^+$ calculer G' en fonction de F et F' en déduire valeur de l'intégrale de Gauss. **Intégrale de** $\boldsymbol{Gauss} \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\ du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

$\forall x > 0,\ \mathbf{\Gamma(x)} = \int_0^{+\infty} \mathbf{t^{x-1}e^{-t}\,dt}.$

1. $\Gamma(x+1) = x.\Gamma(x)\ \ \forall x > 0$ en particulier $\Gamma(2) = 1.\Gamma(1) = \Gamma(1) = \int_0^{+\infty} \mathbf{e^{-t}\,dt = 1}$
2. $\forall x > 0\ \ \Gamma(x+n+1) = x(x+1)\ldots(x+n-1)(x+n)\Gamma(x).$
3. $\forall x > 0\ \ \mathbf{\Gamma(n+1) = n!} \qquad \Gamma(1) = 0! = 1$
4. $\mathbf{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}}$
5. $\forall n \in \mathbb{N}\ \ \mathbf{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}}$
6. $\forall x > 0\ \ \Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}(\ln t)^n\ t^{x-1}\ dt$
7. $\forall x > 0\ \ \mathbf{\Gamma(x+1) = \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{2\pi x}\left(1+\varepsilon(x)\right)}$ avec $\lim_{x\to+\infty} \varepsilon(x) = 0$ ***formule de Stirling***

$\forall p, q > 0\ \ \boldsymbol{\beta(p,q) = \int_0^1 u^{p-1}(1-u)^{q-1}\,du}.$

1. $\forall p, q > 0\ \ \beta(p,q) = \beta(q,p)$
2. " $\qquad \beta(p,q) = \frac{\Gamma(p).\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$
3. " $\qquad \beta(p,q) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q}}\,du$
4. si $p \notin \mathbb{Z}$ $\qquad \beta(p, 1-p) = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$

Intégrale de $\boldsymbol{Gauss} \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\ du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Intégrale de Poisson: $\boldsymbol{\int_0^{+\infty} e^{-a^2x^2}\ \cos\beta x\ dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2|\alpha|}e^{\frac{-\beta^2}{4\alpha^2}}}$.