Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
L2 Math : Analyse III

A.U 18/19

Série n°3 : Séries de Fourier

Exercice 1 : a) Tracer les graphes des fonctions suivantes et trouver les séries de Fourier qui leur correspondent.

1. $f(x) = \left\{\begin{matrix} x & si & 0 \le x < 1 \\ \frac{1}{2} & si & 1 \le x \le 2 \end{matrix} \quad f \text{ de période } 2\right\}$

2. $f(x) = \mathrm{x}(\pi - \mathrm{x}) \quad 0 < x < \pi, \ \ impaire \ et \ P = 2\pi$

3. $f(x) =$x $\quad 0 < x < 2, paire \ et \ P = 4$

b) Donner les discontinuités de chaque fonction et indiquer pour quelles valeurs la série de Fourier correspondante converge.

c) En déduire les sommes des séries suivantes :

$\sum_{n\ge1}\frac{(-1)^n}{2n-1}$; $\sum_{n\ge1}\frac{(-1)^n}{(2n-1)^3}$; $\sum_{n\ge1}\frac{1}{(2n-1)^6}$; $\sum_{n\ge1}\frac{1}{(2n-1)^2}$.

Exercice 02 :

a) Développer en série de Fourier sinus : 1. $f(x) = x \quad 0 < x < \pi$ (supp) 2.$f(x) = e^x \ \ 0 < x < 1$.

b) Développer en série de Fourier cosinus : 1. $f(x) = sinx \quad 0 < x < \pi$ (supp) 2.$f(x) = e^x \ 0 < x < 1$.

c) (supp) Développer $f(x) = x^2, 0 < x < 2\pi$ en série de Fourier de période 2π .

Exercice 03 : (supp) a) Tracer les graphes des fonctions suivantes et trouver les séries de Fourier qui leur correspondent.

1. $f(x) = \sup(cosx, 0) \ \ x \in \mathbb{R}$ 2. $f(x) = \frac{\pi^2 - x^2}{2} \ \ 0 \le x \le \pi \ \ impaire \ et \ de \ période \ P = 2\pi$

3. $f(x) = ch(ax) \quad a > 0, -\pi < x < \pi \ \ et \ de \ période \ \ P = 2\pi$

b) En déduire les sommes des séries suivantes :

$\sum_{n\ge1}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}$; $\sum_{n\ge1}\frac{1}{(4n^2-1)^2}$ $\sum_{n\ge1}\frac{1}{(2n-1)^2}$; $\sum_{n\ge1}\frac{1}{(2n-1)^4}$; $\sum_{n\ge1}\frac{1}{n^4}$. $\sum_{n\ge1}\frac{(-1)^n}{n^2+1}$; $\sum_{n\ge1}\frac{1}{n^2+1}$

Exercice 04 : (supp)

a) Développer en série de Fourier sinus : $f(x) = 1 - x \quad 0 < x < \pi$ (supp) $f(x) = e^{-x} \ \ 0 < x < 1$.

b) Développer en série de Fourier cosinus: $f(x) = x - 1 \quad 0 < x < \pi$ (supp) $f(x) = e^{-x} \ 0 < x < 1$.

c) (supp) Développer $f(x) = x^2, 0 < x < 2\pi$ en série de Fourier de période 2π .

Exercice 05 :

On considère la fonction définie sur R par : $f(x) = e^{e^{ix}}$

1) Justifier que f est égale à la somme de sa série de Fourier.

2) Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}\ f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{e^{inx}}{n!}$, en déduire les coefficients de Fourier complexes de f .

3) Montrer que $\int_0^{2\pi} e^{2cost}\ dt = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n!)^2}$

Exercice 05 : (supp)

Soit f la fonction de période 2π $telle\ que\ f(x) = e^{-x}\quad -\pi < x < \pi$

Calculer les coefficients de Fourier complexes de f en déduire les sommes :

$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$; $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+1}$

Exercice 6 (supp)

1. Développer en série de Fourier la fonction définie par : . $\varphi(x) = |sinx|$.

2. Soit f une fonction de classe C^2 et périodique et $a_n(f)$, $b_n(f)$ses coefficients de Fourier.

Montrer que $a_n(f") = -n^2 a_n(f)\ n \geq 0$ et $b_n(f") = -n^2 b_n(f)\ n \geq 1$.

3. Trouver une solution particulière et $2\pi -$ périodique de l'équation différentielle : $y" + y = \varphi(x)$.

Exercice 7 On considère la fonction f : $]0,1[\ \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = 1 - 2x$

1) Montrer que la fonction f est développable en série de Fourier sinus sur $]0,1[$.
2) Calculer sa série de Fourier sinus étudier la nature de convergence sur $]0,1[$

en déduire les sommes : $S_1 = \sum_{n\geq 1} \frac{sinn}{n}$, $S_2 = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{2n-1}$ et $S_3 = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$

3)Trouver une solution particulière et périodique de période P= 2 de l'équation différentielle $y" + y = \varphi(x)$ avec $\varphi\ impaire$, de période P= 2 et $\varphi(x) = f(x)\quad 0 < x < 1$.