Université de Tlemcen
Département de Mathématiques
Analyse III A.U 18-19

Série n°2

Séries de fonctions – Séries entières.

I. Suites de fonctions

Exercice 1 : Etudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions $f_n \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ suivantes :

1. $I=[0,1]$ i) $\forall n \geq 1$, $f_n(t) = \begin{cases} nt & si \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{n}, \\ \frac{2}{n} - t & si \quad \frac{1}{n} \leq t \leq \frac{2}{n}, \\ 0 & si \quad \frac{2}{n} \leq t \leq 1. \end{cases}$

ii) $f_n(t) = \begin{cases} \frac{e^t}{n+1} & si \quad 0 \leq t \leq 1, \\ 1 - \text{th} n & si \quad 1 < t \leq 2 \end{cases}$ $iii)$ $f_n(x) = \frac{2nx}{1+nx}$ (Voir le cas $I=[1/2,1]$)

$(supp)$2. $I = \mathbb{R}$ $i)$ $f_n(x) = \text{th} nx$ (Voir le cas $I=[a,+\infty[, a > 0$) $ii)$ $f_n(x) = \frac{1}{1+(x-n)^6}$.

iii) $f_n(x) = \text{Arctan} nx$ (Voir le cas $I=[a,+\infty[, a > 0$)

iv) $I=[0,1]$ $\forall n \geq 1$, $f_n(t) \begin{cases} 2n^3t^2 & si \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{n}, \\ 3n - n^2 t & si \quad \frac{1}{n} \leq t \leq \frac{3}{n}, \\ 0 & si \quad \frac{3}{n} \leq t \leq 1. \end{cases}$

Exercice 2 : Trouver le plus grand intervalle de convergence uniforme pour les suites de fonctions $\left(f_n(x)\right)_{n\geq 0}$ *suivantes*:

1. $n(\sin nx).\cos^n x$, $x \in [0,1]$. 2. $\frac{\sin nx}{e^x+(nx)^4}$, $x \in \mathbb{R}$. 3. $\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^n$ $x \in \mathbb{R}$.

$(supp)$ 4. $\frac{e^{-nx}}{1-e^{-x}}$, $x > 0$ 5. $\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$, $x \in \mathbb{R}$ 6. $\ln\left(1 + \frac{e^{-x}}{n}\right)$ $x \geq 0$.

Exercice 3 :

1. Etudier la continuité des f_n *et celle de sa limite* f, en déduire la nature de convergence.

i) $f_n(x) = n\, e^{-nx^2}$ $x \in \mathbb{R}$. ii) $f_n(x) = \begin{cases} (n-2)x & si \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 - \frac{2}{n} & si \quad \frac{1}{n} < x \leq \frac{2}{n} \\ 1 - x & si \quad \frac{2}{n} < x \leq 1 \end{cases}$ (supp) $f_n(x) = 2^{-nx}$ $x \geq 0$

2. Comparer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_I f_n$ et $\int_I f$ pour les suites de fonctions $\left(f_n(x)\right)_{n\geq 0}$:

i) $\frac{n^2x}{1+(nx)^4}$ $x \in \mathbb{R}^+$ ii) $f_n(x) = \begin{cases} n^2x & si \quad 0 \le x \le \frac{1}{2n} \\ n^2\left(\frac{1}{n} - x\right) & si \quad \frac{1}{2n} \le x \le \frac{1}{n} \\ 0 & si \quad x \ge \frac{1}{n} \end{cases}$ iii) $f_n(x) =$

$\begin{cases} \frac{-x^2-nx}{n^3} & si \quad 0 \le x \le n \\ 0 & si \quad x \ge n \end{cases}$

3. Etudier la nature de convergence des suites de fonctions

i) $f_n(x) = \int_2^x \frac{1+e^{-n(t-1)^2}}{t}$ dt $x > 2$. ii) $f_n(x) = 1 + \int_0^x \frac{sht}{1+(t-n)^2} dt, t \in [-a, a]\ a > 0$

II. Séries de fonctions

Exercice 1 :

a) Trouver le domaine de convergence des séries de fonctions de terme général :

1. $\frac{n!}{n^{2n}(1-x)^n}$ 2. $\frac{\sin nx}{n+\sqrt{n}} e^{-nx^2}$ 3. $\frac{(z-2)^{2n}}{a^n.n}. a \in \mathbb{C}^*$ 4. $\sqrt{\left|\sin\frac{x^2}{\sqrt{n}} - tan\ \frac{x^2}{\sqrt{n}}\right|}$

(Supp) 5. $\frac{(-1)^n}{(n+1)}(2x-3)^n$ 6. $(-1)^n\left(n^{\frac{x^2}{n}} - 1\right)$ 7. $e^{-nx^2}\cos nx$ 8. $\frac{(-1)^n}{n^{x^2}}$.

b) Prouver que les séries suivantes convergent uniformément sur $[-\rho, \rho], \forall \rho > 0$

1. $\sum_{n\ge0}\frac{x^n}{n!}$ 2. $\sum_{n\ge0}\frac{(-1)^n\ x^{2n+1}}{(2n+1)\,!}$ 3. $\sum_{n\ge0}\frac{(-1)^n\ x^{2n}}{(2n)\,!}$

converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2 : (Supp) Etudier la convergence simple et uniforme des séries de fonctions:

1. $\sum_{n\ge1}\frac{\cos nx}{n^2}$ 2. $\sum_{n\ge1} th\ nx - th(n-1)x$ $x \in \mathbb{R}$.

3. $\sum_{n\ge2}\log\left(1 - \frac{x}{n^2}\right)$ $0 < x < 1$. 4. $\sum_{n\ge0} arctan\frac{x}{1+n(n-1)x^2}$ $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 3

Soit $f_n(x) = (-1)^n ln\left(1 + \frac{x^2}{n(1+x^2)}\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

a)Etudier la convergence normale et uniforme de la série $\sum_{n\ge1} f_n(x)$

b) Etudier la limite de $S(x) = \sum_{n\ge1} f_n(x)$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 4

1. Prouver la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de la série $\sum_{n\ge1}\frac{\cos n^2x}{n^2}$. La série dérivée converge-t-elle uniformément ?

(Supp)2. Soit $u_n(x) = e^{-(2x+1)\,n}$ et $v_n(x) = 2n\,e^{-(2x+1)\,n}$ $x > 0$,trouver la relation entre $u_n(x)$ et $v_n(x)$ et calculer leurs sommes .

III Séries entières

Exercice 1 : Déterminer le rayon et le domaine de convergence des séries :

1. $\sum_{n\geq 1}\frac{(x+1)^n chn}{1+2\ldots+n}$ 2. $\sum_{n\geq 1}\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^{-2n}(2x-1)^n$ 3. $\sum_{n\geq 1}\left(n^{1/n}-1\right)(2Z+i)^n$

4. $\sum_{n\geq 0}\frac{Z^{3n}}{(3n)\,!}$ 5. $\sum_{n\geq 1}\left(\cos\frac{1}{\mathrm{n}}\right)^{\frac{\mathrm{n}^2+1}{\mathrm{n}}}\frac{(x+1)^n}{n^{\sqrt{n}}}$

(Supp) 6. $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{\mathrm{n}}Z^{2n}}{3+\cos\mathrm{n}}$. 7. $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^2}(x-1)^n$ 8. $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1+\mathrm{in}}{2+3\mathrm{in}}\right)^{\mathrm{n}}(Z-i)^n$.

Exercice 2 : Calculer les sommes des séries suivantes :

1. $\sum_{n\geq 2}\frac{2n}{n^2-1}\,e^{-n}$ 2. $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{3n+2}$ 3. $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n\,nx^n}{(2n)\,!}$ 4. $\sum_{n\geq 0}\frac{t^n\sin nt}{n!}$.

(Supp) 5. $\sum_{n\geq 0}\frac{(2-x)^{2n+1}}{(n+1)}$ 6. $\sum_{n\geq 0}\frac{n+1}{3^n}$ 7. $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n\,n\;\;z^n}{(2n)\,!}$ 8. $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(3n)\,!}$

9. $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n(n+1)(2n+1)2^n}$

Exercice 3

1) Si $f(x)=\sum_{n\geq 0}a_n\,x^n$ avec $a_{n+3}=2a_n\;\forall n\geq 0$,déterminer le domaine de convergence de la série et trouver une formule explicite de $f(x)$.

2) (Supp)Même question avec $a_{n+4}=-a_n\;\forall n\geq 0$.

3) Soit $f(x)$ une fonction développable en série entière autour de l'origine telle que $\forall n\geq 0\quad f^{(2n)}(0)=\frac{2^n(2n)!}{n!}$ et $f^{(2n+1)}(0)=\frac{(-1)^n(2n+1)!}{2n+3}$

Calculer le rayon et le domaine de convergence de la série entière $associée$ à $f(x)$ et exprimer la somme en fonction des fonctions usuelles.

Exercice 4 : Soit $\theta\epsilon\mathbb{R}$, $|x|<1$ vérifier que :

(Supp) 1. $\sum_{n\geq 0}x^n\cos n\,\theta=\frac{1-x\cos\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}$ 2. $\sum_{n\geq 0}x^n\sin n\theta=\frac{x\sin\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}$

3. $\sum_{n\geq 1}\frac{x^n\cos n\,\theta}{n}=\frac{1}{2}\log(1-2x\cos\theta+x^2)$ 4. $\sum_{n\geq 1}\frac{x^n\sin n\theta}{n}=Arctan\left(\frac{x\sin\theta}{1-x\,cos\theta}\right)$.

Exercice 5 : Développer en série entière autour de l'origine les fonctions suivantes :

$\frac{x+2}{3+2x-x^2}$, $\frac{1}{(1+x^2)(1-x)}$, $\frac{\ln(1+x)}{1-x}$, $Arc\sin x$, cos^3x, $\frac{\sin 2x}{\sin x}$ $(x\neq 0)$, $\sin x\,\mathrm{sh}\,x$, $\int_0^1\frac{ln(1+xu)}{u}\,du$.

(Supp) $\frac{1-x\,\mathrm{ch}\,\theta}{1-2x\,\mathrm{ch}\,\theta+x^2}$ $\frac{x^4}{1+x^2+x^4}$, $\frac{4x+1}{4x^3-3x+1}$, $Arctan\frac{x-a}{1-ax}$, $Arg\,\mathrm{sh}\,x$, $\int_0^x\frac{Arctan\,u}{u}\,du$.

Exercice 6 : (Supp)

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière : $\sum_{n\geq 0}\frac{2^n\,(n!)^2\;\;x^{2n+1}}{(2n+1)\,!}$.

Vérifier que sa somme f est solution sur $]-R,R[$ de l'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$(x^2-2)y'+xy=-2\;\;avec\;\;y(0)=0$ .En déduire le calcul explicite de f.

Exercice 7 :

Chercher les séries entières solutions des équations différentielles suivantes :

$(E_{1.})$ $(1+x)\,y' = \alpha\, y$ $\alpha > 0$ telle que $y(0) = 1$

$(E_{2.})$ $(1+x^2)\,y'' + xy' - y = 0$

(E_3) $y'' - 2xy' + 4y = 0$, vérifiant $y(0) = 0$ *et* $y'(0) = 1$.

(E_4) $x^2\,y'' + x^2 y' - 2y = 0$.

Sommes remarquables de quelques séries entières

Somme	Rayon de convergence
$\frac{1}{1+x} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n x^n.$	1
$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n\geq 0}(n+1)x^n.$	"
$\mathrm{Ln}(1-x) = -\sum_{n\geq 0}\frac{x^{n+1}}{(n+1)}$	"
$\mathrm{Ln}(1+x) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)}$	"
$\mathrm{Ln}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\sum_{n\geq 0}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$	"
$\mathrm{Argth}x = \sum_{n\geq 0}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}.$	"
$\frac{1}{(1-x)^p} = \sum_{n\geq 0} C_{n+p-1}^{P-1}x^n.$	"
$\mathrm{Arctan}x = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)}.$	"
$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n\geq 1}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)x^n}{n!}.$	"
$\mathrm{Arcsin}\,x = \sum_{n\geq 0}\frac{(2n)!x^{2n+1}}{(2^n n!)^2(2n+1)}$	"
$\mathrm{Argsh}x = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n(2n)!x^{2n+1}}{(2^n n!)^2(2n+1)}.$	"
$e^x = \sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}.$	$+\infty$
$\mathrm{Sh}x = \sum_{n\geq 0}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	"
$\mathrm{Ch}x = \sum_{n\geq 0}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$	"
$\mathrm{Sin}\,x = \sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$	"
$\cos x = \sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$	"