Université de Tlemcen
Faculté des sciences
Département de Mathématiques
A.U 18/19
L2 Math : Analyse III

Série n°1 : Séries Numériques

Exercice 1 : Calculer les limites des suites suivantes :

1. q^n 2. $n^n q^n$ 3. $n^\alpha q^n$ 4. $n!\, q^n$ $q \in \mathbb{R}$ 5. $n^\alpha\, lnn$ 6. $\left(\frac{n+a}{n+b}\right)^n$ 7. $\left(\frac{n+a}{n^2+bn+c}\right)^n$ 8. $\frac{n^n}{e^n n!}$

9. $sin\left(\pi\frac{n^3+1}{n^2+1}\right)$ 10. $\left(1-cos\frac{\pi}{n}\right)(lnn)^\alpha$ 11. $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ 12. $\frac{2^n(sin\alpha)^{2n}}{n^2}$ 13. $\frac{4^{n+1}(n+1)!^2}{(2n+1)!}$

14. $\left(nartan\frac{1}{n}\right)^{n^\alpha}$ 15. $\sqrt{n}\left(n^{\frac{1}{n}}-cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 16. $\tan\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$ 17. $\cos\left(\pi\sqrt[3]{n^3+\frac{3}{2}n^2+1}\right)$

18. $\left(\sqrt{n^2+n+1}\right)-\sqrt[3]{n^3+\frac{3}{2}n^2+1}+a+\frac{b}{n}$. $a,b,c,\alpha,\beta \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 :

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes dans $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que, si $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l>0$, alors $\left(\sqrt[n]{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.
2. $Soit\ u_n = \begin{cases} a^p b^p & si\ n=2p \\ a^{p+1}b^p & si\ n=2p+1 \end{cases}$ $a>b>0$
   Calculer ,si elles existent $lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$ et $lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$,la réciproque de la proposition précédente est-elle vraie ?
3. Déterminer les limites ,quand n tend vers l'infini de :

$$\left(\frac{2n!}{(n!)^2}\right)^{1/n},\ \frac{n}{(n!)^{\frac{1}{n}}},\ \frac{\sqrt[n]{n(n+1)..(n+n)}}{n},\ \frac{\sqrt[n]{1.3.5.(2n+1)}}{2n},\ \sqrt[n]{\frac{3n!}{n!}}.$$

Exercice 3 : (Séries télescopiques)

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite numérique. On pose $u_n = a_n - a_{n+1}$.

i) Montrer que $\sum u_n$ converge ssi la suite$(a_n)_n$ converge .

ii) Montrer que les séries suivantes convergent et calculer leurs sommes.

1) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ 2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{9}{(3n+1)(3n+4)}$ 3. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{3^n}sin^3(3^n\theta)$

4. $\sum_{n=1}^{+\infty}arctan\frac{8n}{n^4-2n^2+5}$. 5) $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{2^n}th\left(\frac{x}{2^n}\right)$. $\left(\frac{thx}{2}=\frac{1}{th2x}-\frac{1}{2thx}\right)$ 6. $\sum_{n=2}^{+\infty}Ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$

Supp. $\sum_{n=2}^{+\infty}Ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ $\sum_{n=1}^{+\infty}\sin\frac{1}{n(n+1)}\sin\frac{2n+1}{n(n+1)}$ $\sum_{n=1}^{+\infty}arctan\frac{1}{2n^2}$

$\sum_{n=1}^{+\infty}Ln\left(cos\frac{x}{2^n}\right)$ $0<x<\frac{\pi}{2}$. $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$ 5. $\sum_{n\geq 0}\frac{\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}}{2^{n+1}}$ 7. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1}$

Exercice 4 :

Montrer qu'il existe (a,b,c)∈ $\mathbb{R}^3$ tels que :$\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+2)}$.

i) Calculer la somme partielle de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+4)}$ (en utilsant $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$) en déduire la somme.

ii) Calculer les sommes $a) \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n+2)}$ $b)$ $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+3)(n+2)}$.

Exercice 5 :

Soit le polynôme de degré k : $\mathrm{P_k(x)}=x\,(x-1)\ldots(x-(k-1))$ $k \geq 1$.

i) Calculer $\sigma_k = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{P_k(n)}}{n!}$ en utilisant la somme e= $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$

ii) En déduire les sommes des séries suivantes : $a) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{n^3-n^2+2n+5}}{n!}$. (supp)

b) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{n^2-n-6}}{n!}$ c) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{n^3-3n^2+1}}{n!}$

Exercice 6 :

1) Quelle condition suffisante simple peut-on imposer à une fonction f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ telle que la série $\sum \frac{f(n)}{n^2}$ converge.

2) Soit f :$\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une bijection, étudier la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^2}$.

(vérifier que : $\forall\, n \geq 1$ $S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{8}$ $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{f(k)}{k^2}$)

Exercice 7:

1) Soit la série $\sum u_n$, on pose $v_n = (u_{2n} + u_{2n+1})$.

i) Montrer que : si $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ $alors$ $\sum u_n\ et\ \sum v_n$ sont de même nature et de même somme éventuellement.

ii) Vérifier le résultat pour a) $u_n = (-1)^n$ et b) u_{2n}=$-\frac{1}{n} + \left(\frac{sin1}{e}\right)^n$ $et\ u_{2n+1}$=$\frac{1}{n}$.

Exercice 8 : (supp)Soit $a > 0$

1) Montrer que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+a} = \int_0^1 \frac{1-t^a}{1-t} dt$ (ind : $u_n = \int_0^1 t^{n-1}\,(1-t^a)\,dt$)

2) Calculer cette somme pour a=1/2, a=1/3

3)(supp) Justifier que $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{1+na} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^a} dt$

Exercice 9 :

a) Soit $u_n > 0$ $\forall n \in N$. On pose $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$, $w_n = \frac{u_n}{1+u_n{}^2}$ $et\ z_n = \frac{1}{n}\left(u_1 + \frac{u_1+u_2}{2} + \cdots + \frac{u_1+\cdots+u_n}{n}\right)$.

i) Montrer que les deux séries $\sum u_n et\ \sum v_n$ sont de même nature.

ii) Comparer la convergence des séries $\sum u_n$,$\sum w_n$ et $\sum z_n$.

b) (supp)Déterminer l'ensemble des couples (a,b)∈ $\mathbb{R}^2$ tels que la série de terme général $u_n = \frac{3^n+a^n}{3^n+b^n}$ soit convergente.

c) (supp) Déterminer l'ensemble des triplets (a,b,c)∈ $\mathbb{R}^3$ tels que la série de terme général $u_n = \frac{1}{an+b} - \frac{c}{n}$ soit convergente.

Exercice 10 (supp)

1) Soient α un réel tel que $0 < \alpha \leq 1$,et $(a_n)_n$une suite de réels positifs .On suppose que $\sum_{n\geq 1} a_n^{\alpha}$ converge. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$ $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^{\alpha} \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^{\alpha}$,en déduire que la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} a_n$.
2) Soit $\sum_{n\geq 1} a_n$ une série à termes positifs convergente , étudier la nature des séries :

$\sum_{n\geq 1} a_n^2$, , $\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$, $\sum_{n\geq 1} a_n \ a_{2n}$

3) Soit $\sum_{n\geq 1} a_n$ une série à termes positifs divergente, étudier la nature des séries :

$\sum_{n\geq 1} a_n^2$, $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{1+a_n}$, ,$\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{1+na_n}$ $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{1+n^2 a_n}$

Exercice 11 : Déterminer la nature des séries de terme général :

1 . $\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\dots+\frac{1}{n}}{n!}$. 2. $\frac{2.5.8\dots(6n-7)(6n-4)}{1.5.9\dots(8n-1)(8n-7)}$. 3. $\frac{4^n n!}{n^n}$ 4 .$\frac{1}{n^{\alpha}(lnn)^{\beta}}$ 5. $\frac{\sqrt[5]{n+1}-\sqrt[5]{n}}{(\sqrt{n}+1)}$

6.$\frac{1}{n.lnn.ln(lnn)}$ 7. $\left(\frac{2n+3}{3n+1}\right)^{n^2}$ 8.$\frac{n!e^n}{n^{n+\alpha}}$ 9. $\frac{\pi}{2} - arctan\, n^{\alpha}$

10. $\frac{1}{n}\left(1-\sqrt[n]{2}\right)^n$ 11.$\frac{e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n^{\frac{9}{2}}-E\left(n^{\frac{9}{2}}\right)+\sqrt{n}}$ 12.$\sum_{n}^{+\infty}\frac{1}{k^{\alpha}}$ $\alpha > 1$ 13. $\ln\left[1+sh\frac{1}{n^{\alpha}}\right]$

14.$\left(ln\frac{1}{cos\frac{1}{n}}\right)^n$ 15. $e^n\sqrt{\mathrm{n}!}\prod_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}}\sin\frac{1}{\mathrm{k}}$ 16. $Arccos\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^2}}$ 17. $\left[argch\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right]^{\alpha}$

18. $sin\left(\left(2-\sqrt{3}\right)^n\pi\right)$ 19. $(\sin\frac{1}{n}).(\tan\frac{1}{n})\left[\!\left[cos\frac{1}{n}-1+\frac{1}{2n^2}\right]\!\right]n^{7/2}$.

20. $\tan\left(e^{-\sqrt[3]{1+\sqrt{n}}}\right)$ 21. $\frac{1}{n^{\alpha}}\sum_{n}^{+\infty}\frac{1}{k^{\alpha}}, \alpha > 1$ 22. $u_{2n} = u_{2n+1} = \left(\frac{1}{1+lnn}\right)^{2n}$ 23. $sin(2\pi\, n!\, e)$.

(supp)1 . $\frac{1.5\dots(4n-3)}{2.4.6.10\dots(4n-4)(4n-2)}$ 2.$\frac{n^{lnn}}{ln^n n}$ 3. $\frac{3^n n!}{n^n}$ 4 .$r^n|sinn\alpha\pi|$ r> 0 et $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$
5. $\frac{\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n}}{(2\sqrt{n}-1)}$ 6. $\frac{1}{ln(ln^{\beta}n)}$ 8.$\frac{1}{n^{\alpha}}\sum_{2}^{n}\frac{1}{klnk}$ 9. $\frac{1+2+\dots+n}{1^2+2^2+\dots n^2}$ 10. $\frac{\sqrt[3]{n}}{(2n-1)(\sqrt[4]{n}+1)}$ 11. $\frac{3^{2^n}}{2^{3^n}}$
12. $\frac{13.5\dots(2n-1)}{4.8.12\dots4n}$.

Exercice 12:

1) Montrer la convergence et Calculer les sommes des séries :

1. $\sum_{n\geq 0} a^n cosn\alpha$ et $\sum_{n\geq 0} a^n sinn\alpha$, $|a| < 1$ 2.$\sum_{n\geq 0}(1-a)\left(inf\left(a,\frac{1}{a}\right)\right)^n$ $a \in R^+$
.

(supp) 3. $\sum_{n\geq 1}\frac{cosnx}{2^{2n}cos^n x}$ et $\sum_{n\geq 1}\frac{sinnx}{2^{2n}cos^n x}, x \in R$. 4. $\sum_{n\geq 1}\frac{chnx}{2^n ch^n x}$ et $\sum_{n\geq 1}\frac{shnx}{2^n ch^n x}, x \in R$.

2) Ecrire le nombre 2,954120312031203… sous forme p/q où p et q sont des entiers. Vérifier que la répétition de motifs à partir d'un certain rang est une caractéristiques des nombres rationnels

3) (supp)Soit la série $5-\frac{1}{3}+\frac{5}{3^2}-\frac{1}{3^3}+\frac{5}{3^4}+\cdots$

a) Déterminer si elle est absolument convergente, semi-convergente ou divergente.

b) Calculer sa somme en cas de convergence.

Exercice 13 :

1) Montrer que la suite de terme général : $a_n = lnn! - \left(n+\frac{1}{2}\right) lnn + n$, converge.

(Ind : étudier la série de terme général : $u_n = a_n - a_{n+1}$).

2) Montrer que : $n! = K\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$, $K \in \mathbb{R}$. $(Formule\ de\ Stirling\ avec\ K = \sqrt{2\pi})$

Exercice 14 :

Déterminer la nature des séries de terme général :

1. $(-i)^n arctan\frac{1}{n\sqrt{n}}$ 2. $\frac{(-1)^n}{1+2^\alpha+\cdots+n^\alpha}$ 3. $\frac{(-1)^n 4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$ 4. $\frac{(-1)^n}{n-lnn} sin2n$ 5. $(Sin\ n)e^{-\alpha\sqrt{n}}$

6. $\mathrm{Ln}\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ 7. $\left(\frac{5+n(2i-1)}{n(3+i)-2}\right)^n$ 8. $\frac{n(i-1)^n}{3^n}$ 9. $sin(\pi\, n!\, e)$ 10. $\sum_n^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}$ 11. $\int_n^{n+\frac{1}{2}}\frac{sint\ dt}{\sqrt{t^4+1}}$

12. $\left(\left(\sqrt{n^2+n+1}\right) - \sqrt[3]{n^3+\frac{3}{2}n^2+1} + a + \frac{b}{n}\right)$ $\frac{(-1)^n n^\alpha sin\frac{1}{n^\alpha}}{n^\beta+(-1)^n}$ $\alpha,\beta > 0$

13. $f\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ $(\alpha > 0, f\ de\ classe\ C^2$ au voisinage de 0)

(Supp) 1. $\tan\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$ 2. $\frac{(-1)^n \cos n\frac{\pi}{3}}{\sqrt{n}}$. 3. $f\left(a+\frac{1}{n}\right)+f\left(a-\frac{1}{n}\right)-$ $2f(a)$ (f de classe C^2 au voisinage de a) . 4. $(-i)^n tan\frac{1}{\sqrt{n}}$ 5. $\frac{cos\sqrt{n}}{2n\sqrt{n}}$

6. $\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n\sqrt[3]{n+1}}$ 7. $(-1)^n\sqrt[n]{1/n}$ 8. $(-1)^n\left(\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)$

9. $\cos\left(\pi\sqrt[3]{n^3+\frac{3}{2}n^2+1}\right)$ 10. $u_{2n} = \frac{-1}{3^n}$, $u_{2n+1} = \frac{1}{2n+1}$ 11. $\frac{Sin\ n\alpha}{(\ln 10)^n}$. 12. $\left(\tan\left(\frac{1}{n}\right)+\ln\left(\frac{n^2+\sqrt{n}}{n^2-n}\right)\right)$

Exercice 15(*Majoration du reste de série)*

Soit $\sum_{n\geq 1} a_n$ une série à termes positifs convergente et soit R_n $son\ reste$.

1. Vérifier que si $\exists k < 1$ $\forall n > n_0$ $a_n < k^n$ $alors$ $R_n < \frac{k^{n+1}}{1-k}$
2. " " $\frac{a_{n+1}}{a_n} < k$ $alors$ $R_n < \frac{a_{n+1}}{1-k}$

Applications :

a) Combien faut-il prendre de termes dans la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{2n+5^n}$ pour avoir la somme à 10^{-2},10^{-3} près .

b) Même question pour la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{(n!)^2}$.

Exercice 16 (*Majoration du reste de la série de Riemann)*

Soit $R_n = \sum_{k\geq n+1}\frac{1}{k^\alpha}$ $\alpha > 0$:le reste d'ordre n de la série de *Riemann.*

a) Prouver que pour $m \geq 1$ $R_n - R_{n+m} \leq \int_n^{n+m}\frac{dx}{x^\alpha}$ en déduire que $R_n \leq \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$

b) A partir de quel n a-t-on $R_n \leq 10^{-k}$?

Exercice 17 (*Majoration du reste de la série* alternée)

Soit $\sum_{n\geq1}(-1)^n \mathrm{V}_n$ une série alternée convergente et S_n sa somme partielle d'ordre n, montrer que :

i. $(\mathrm{S}_{2n})_n$ et $(\mathrm{S}_{2n+1})_n$ sont adjacentes.

ii. $|\mathrm{R}_n| \leq \mathrm{V}_{n+1}$ où R_n est le reste d'ordre n.

iii. Le signe de R_n est le même que celui de son premier terme

Exercice 18 (supp)

1) Soit la série $-1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^4}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n^n}+\ldots$

Evaluer l'erreur commise en remplaçant la somme de la série par les quatre premiers termes, par la somme des cinq premiers termes. Que peut on- dire du signe de ses erreurs ?

2) Combien faut-il prendre de termes dans la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{(n+1)4^n}$ pour avoir la somme de la série à 10^{-3} prés ?

Exercice 19:

a) Montrer que le produit de la série semi-convergente $\sum_{n\geq1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ *par elle* $-$ *même* est une série divergente.

b) Montrer que le produit de la série semi-convergente $\sum_{n\geq1} \frac{(-1)^n}{n}$ *par elle* $-$ *même* est une série convergente.

Exercice 20 :

a) Former le produit (de Cauchy) des séries $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$ est ce que ce produit est convergent ?

(supp) b) Former la série : $\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}-\cdots.+\frac{(-1)^n}{4^n}+\cdots\right)^2$ est ce que cette série converge?

(supp) c) Soit la série $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{\left((n+1-k)\ln(2+k)^{\sqrt{k+2}}\right)^2}$

i) De quelles séries est le produit de Cauchy ?

ii) En déduire si elle est absolument convergente, semi-convergente ou divergente.