Université de Tlemcen.
Département de mathématiques
Algèbre 3

le 26/11/2018.

Série n° 4
Réduction des endomorphismes
" Suite 1 ".

Exercice n° 7

Soit E un C espace vectoriel et f un endomorphisme de E tel que.

$$A = M(f)_{e_i} = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a+b & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$$ où $\{e_i\}$ est une base quelconque de E.

A est elle diagonalisable ?.

Exercice n° 8

Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$

$P \longmapsto f(P) = (2X+1)P - (X^2-1)P'$

Calculer $f^n(a_0 + a_1X + a_2X^2)$ $\quad f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$.

Exercice n° 9

Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}$ si possible, sinon dans $\mathbb{C}$

Exercice n° 10

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 1+a \end{pmatrix}$ $a \in \mathbb{R}$.

On définit une suite $(u_n)_n$ par la donnée de u_0 et u_1 et la relation de récurrence suivante:

pour $n \in \mathbb{N}$ $\quad u_{n+2} = (1+a)u_{n+1} - a u_n$.

1/ Pour quelles valeurs de a la matrice A est elle diagonalisable ?.

2°/ Lorsque A est diagonalisable calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$

3°/ On suppose A diagonalisable et on pose $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$, exprimer U_{n+1} en fonction de U_n puis U_n en fonction de U_0 et enfin le terme général de la suite u_n en fonction de u_0 et u_1.

Exercice n° 11

Soit $A_t = \begin{pmatrix} t & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1°/ Sans calculer $P_{A_t}(\lambda)$, montrer que $(t-1)$ est une valeur propre de A_t, determiner E_{t-1} et que peut on dire de la multiplicité de $(t-1)$.

2°/ En déduire le spectre de A_t.

3°/ A_t est-elle diagonalisable ?

Exercice n° 12

1°/ Trigonaliser les matrices suivantes en précisant les matrices de passage.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; \quad C = \begin{pmatrix} 13 & -5 & -2 \\ -2 & 7 & -8 \\ -5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

2°/ Résoudre $\dfrac{dX}{dt} = B.X$.

Devoir n° 4

1°/ Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

A est elle diagonalisable, trigonalisable, si oui donner une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale, triangulaire supérieure.

2°/ Diagonaliser la matrice.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -a-1 & a & a+1 \\ -a & a & a+1 \end{pmatrix} \quad a \in \mathbb{R}.$$

Bon Courage pour les contrôles