Université de Tlemcen

Département de mathématiques

Algèbre 3

le 13/11/2018

Série n° 3 Réduction des endomorphismes

Exercice n° 1

1°/ Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par $f(x,y) = \frac{1}{5}(3x+4y, 4x-3y)$.

Déterminer $A = M(f)_{e_i}$ où $\{e_i\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

2°/ Montrer que le vecteur $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de f.

Quelle est la valeur propre associée ?

3°/ Montrer que $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est également un vecteur propre de f.

Quelle est la valeur propre associée ?

4°/ Calculer graphiquement l'image du vecteur $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Retrouver ce résultat par le calcul.

5°/ Montrer que la famille $\{v_1, v_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$

6°/ Déterminer $D = M(f)_{v_i}$

7°/ Soit $P = \begin{array}{cc} v_1 & v_2 \end{array}$ $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, calculer P^{-1}.

8°/ Quelle relation y-a-t-il entre A, P, P^{-1} et D.

9°/ Calculer A^n.

Exercice n° 2

1°/ Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$

Montrer que $0 \notin Sp(f) \Leftrightarrow f$ surjectif.

2°/ Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $0 \in Sp(f^n)$

Montrer que $0 \in Sp(f)$.

Exercice n° 3

Soit E l'espace des suites réelles bornées et $\Delta : E \longrightarrow E$ l'endomorphisme défini par :

$$\Delta(u)(n) = u(n+1) - u(n)$$

Déterminer les valeurs propres de Δ.

Exercice n° 4

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel $(E \neq \{0\})$, f un endomorphisme nilpotent. $(\exists n \in \mathbb{N} / f^n = 0)$. Déterminer les valeurs propres de f et les sous espaces propres associés.

Exercice n° 5

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & a^2 & 0 \\ -1 & 0 & a^2 \end{pmatrix} \quad a \neq 0$$

Exercice n° 6

1°/ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Montrer que λ valeur propre de $A \iff \bar{\lambda}$ valeur propre de $\bar{A}$

(avec la même multiplicit

2°/ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que λ valeur propre de $A \iff \bar{\lambda}$ valeur propre de A

(avec la même multiplicit

Devoir n° 3

Soit E le sous espace vectoriel des fonctions de $\mathcal{C}([0,+\infty[, \mathbb{R})$ s'annulant en 0 et $\varphi : E \longrightarrow E$ l'endomorphisme de E défini par : $\varphi(f)$ pour tout $f \in E$ $\varphi(f)(0) = 0$ et $\varphi(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$, x

Déterminer les valeurs propres de φ.