Université de Tlemcen. le 15/10/2018.
Département de mathématiques
Algèbre 3

Série n° 1 : DETERMINANTS

Exercice n° 1

1°/ Décomposer en facteurs premiers de $\mathbb{N}^*$, 451, 2706, 1804 et 2255.

2°/ En déduire sans le calculer que le determinant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 0 & 6 \\ 1 & 8 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$ est nul.

3°/ Montrer sans le calculer que le determinant $D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 1 \\ 5 & 9 & 5 \end{vmatrix}$

est divisible par 17

Exercice n° 2

Soient P, Q, R, S et T 5 polynômes de $\mathbb{R}_3[X]$, montrer que le determinant

$$C = \begin{vmatrix} P(-2) & P(-1) & P(0) & P(1) & P(2) \\ Q(-2) & Q(-1) & Q(0) & Q(1) & Q(2) \\ R(-2) & R(-1) & R(0) & R(1) & R(2) \\ S(-2) & S(-1) & S(0) & S(1) & S(2) \\ T(-2) & T(-1) & T(0) & T(1) & T(2) \end{vmatrix}$$ est nul.

Exercice n° 3

Montrer que pour $n > 2$

$$\begin{vmatrix} a_1 - b_1 & a_1 - b_2 & \cdots & a_1 - b_n \\ a_2 - b_1 & a_2 - b_2 & \cdots & a_2 - b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n - b_1 & a_n - b_2 & \cdots & a_n - b_n \end{vmatrix} = 0 \quad , a_i, b_i \in \mathbb{R}.$$

Exercice n° 4

Calculer $D_n = \begin{vmatrix} 2a & a & 0 & \cdots & 0 \\ a & 2a & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & 0 & a & 2a \end{vmatrix}$ $a \in \mathbb{R}$

Exercice n° 5

Soit $D = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} k & n-k \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right) \begin{array}{l} \}k \\ \}n-k \end{array} \end{array}$ $A \in \mathcal{M}_k(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n-k}(\mathbb{K})$.

1/ Montrer que $\det A = \det A \times \det C$.

2/ Montrer que si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\det \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B & A \end{array}\right) = \det(A+B)\det(A-B)$

Exercice n° 6

Soient $x, a_0, \ldots, a_n$ de $\mathbb{R}$ et D_n le déterminant d'ordre $(n+1)$ suivant :

$$D_n = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \\ -1 & x & 0 & & 0 \\ 0 & -1 & x & & \\ \vdots & 0 & -1 & & \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & x \end{vmatrix}$$

Exercice n° 7

Calculer les déterminants suivants

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}$$

Exercice n° 8

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que ${}^tA = \overline{A}$, montrer que $\det A \in \mathbb{R}$.

Université de Tlemcen.
Département de mathématiques.

le 22/10/2018.

Algèbre 3

Serie n° 1 : "Determinants"
"Suite"

Exercice n° 9

Soit $a \in \mathbb{R}$, on note Δ_n le determinant suivant.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & & 0 & n-1 \\ 0 & a & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & & & & 0 \; a & 2 \\ n-1 & \cdots & & & 2 \; 1 & a \end{vmatrix}.$$

1/ Calculer Δ_n en fonction de Δ_{n-1}.

2/ Démontrer que $\forall n \geq 2 \quad \Delta_n = a^n - a^{n-2} \sum_{i=1}^{n-1} i^2$.

Exercice n° 10

Soient $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, calculer.
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_1 & & \ddots & a_2 \\ & & & a_1 \end{vmatrix}$$

Exercice n° 11

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer.
$$\begin{vmatrix} S_1 & S_1 & S_1 & \cdots & S_1 \\ S_1 & S_2 & S_2 & \cdots & S_2 \\ \vdots & \vdots & S_3 & \cdots & S_3 \\ & & \vdots & & \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_n \end{vmatrix}$$

où pour tout k $1 \leq k \leq n$ on a $S_k = \sum_{i=1}^{k} i$

→

Exercice n° 12

Calculer en établissant une relation de récurrence.

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ -1 & & 0 \end{vmatrix}_{[n]}$$

Exercice n° 13

1/ Calculer l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs. $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

2/ Calculer le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3/ Montrer que le volume d'un parallélépipède dont les sommets sont des points de $\mathbb{R}^3$ à coefficients entiers est un nombre entier

Devoir n° 1

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ $(a \neq b)$; $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$,

on pose

$$\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} \lambda_1 + x & a+x & \cdots & a+x \\ b+x & \lambda_2 + x & & a+x \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & a+x \\ b+x & & b+x & \lambda_n + x \end{vmatrix}.$$

1°/ Montrer que $\Delta_n(x)$ est une fonction affine de x.

i.e $\Delta_n(x) = \alpha x + \beta$.

2°/ Calculer $\Delta_n(x)$ et en déduire $\Delta_n(0)$