Université de Tlemcen le 16/09/2018

Département de mathématiques

Algèbre 3

Serie n°0 : Révisions.

Exercice n° 1

1°/ Soit $\mathbb{R}^4$ le $\mathbb{R}$ espace vectoriel et F_1 et F_2 deux sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ définis par :

$$F_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x+y = 2t+z\}.$$

$$F_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / 2x+3y+3z-2t=0,\ x+5y+z+3t=0\}.$$

Determiner $\dim F_1$ et $\dim F_2$

2°/ Soit $\mathbb{R}_4[X]$ le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des polynômes à une indeterminée à coefficients dans $\mathbb{R}$ et de degré inférieur ou égal à 4, P_1 et P_2 les sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}_4[X]$ définis par :

$$P_1 = \left\{P \in \mathbb{R}_4[X] \ / \int_0^1 P(x)\,dx = 0\right\}$$

$$P_2 = \{P \in \mathbb{R}_4[X] / P(x) - P'(x)(X+1) = 0\}.$$

Determiner $\dim P_1$ et $\dim P_2$

3°/ Soit $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices de type 3 et à coefficients dans $\mathbb{R}$, E le sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ défini par:

$$E = \{A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / {}^tA = A\}.$$

Determiner $\dim E$

Exercice n° 2

On considère $F = [v_1, v_2, v_3]$ et $G = [W_1, W_2]$ deux sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ avec $v_1 = (1,-1,0,2)$; $v_2 = (2,1,3,1)$; $v_3 = (4,5,9,-1)$.
$W_1 = (1,1,1,1)$; $W_2 = (3,-4,4,2)$

Determiner une base de F, une base de G et une base de $F \cap G$.

Exercice n° 3

1°/ Montrer que les vecteurs $v_1=(1,2,-1,0,1)$; $v_2=(2,1,1,1,1)$; $v_3=(3,2,0,1,2)$. forment une famille libre de $\mathbb{R}^5$

2°/ Déterminer deux vecteurs W_1 et W_2 de $\mathbb{R}^5$ de manière à ce que la famille $\{v_1, v_2, v_3, W_1, W_2\}$ soit une base de $\mathbb{R}^5$.

Exercice n° 4

Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,E)$ telles que : $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$.

Montrer que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} g$.

Exercice n° 5

1°/ On considère les applications f_n $(n \in \mathbb{N})$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f_n(x) = e^{nx}$. Montrer que la famille $\{f_0, \dots, f_n\}$ est libre.

2°/ On considère les applications f_n $(n \in \mathbb{N})$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f_n(x) = x^n$. Montrer que la famille $\{f_0, \dots, f_n\}$ est libre et en déduire $\dim \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice n° 6

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E, montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$; (b) $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$; (c) $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.

Exercice n° 7

Soit N une matrice carrée, on dit que N nilpotente s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $N^p = 0$.

Montrer que si N est nilpotente alors $(I-N)$ est inversible.

Application : calculer l'inverse de la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & a & b \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

Exercice n° 8

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie n, F et G deux sous espaces vectoriels de E.

Montrer que :

$$(\dim F + \dim G > n) \Longrightarrow (F \cap G \text{ contient un vecteur non nul}).$$

Exercice n° 9

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie n, f un endomorphisme de E.

Montrer que :

$$(\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f) \Longleftrightarrow f^2 = 0 \text{ et } n = 2\operatorname{rg} f.$$

Exercice n° 10

1/ Montrer que si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $AB = BA$ on a la formule du binôme :

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^k B^{n-k}$$

2/ A-t-on le même résultat si A et B ne commutent pas ?

(ie $AB \neq BA$).