Faculté des Sciences
Dept. Maths. Tlemcen

Epreuve finale de Topologie
(Durée 1h30)

Exercice1(12 pts)

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de [-1; 1] à valeurs dans R. Pour f $\in$ E, on pose N(f) $=\int_{-1}^{1} |f(t)|\, dt$

1) Montrer que N est une norme sur E.

2) On définit une suite $(f_n)_{n\in N^*}$ d'éléments de E, par

$$f_n(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } \; -1 \leq t \leq -\frac{1}{n} \\ nt & \text{si } \; -\frac{1}{n} \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } \; \frac{1}{n} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

a) Représenter graphiquement f_n pour n = 1;2;3 et vérifier que $f_n \in$ E pour tout n$\geq$ 1.

b) Montrer que N(f_n -f_p) $\leq \sup(\frac{4}{n};\frac{4}{p})$ et en déduire que $(f_n)_n$ est une suite de Cauchy.

c) On suppose qu'il existe une fonction f $\in$ E telle que (f_n) converge vers f dans (E;N). Montrer que pour tout 0<$\alpha < 1$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{-\alpha} |f_n(t) - f(t)|\, dt = 0 \text{ et } \lim_{n\to\infty} \int_{\alpha}^{1} |f_n(t) - f(t)|\, dt = 0$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{-\alpha} |f_n(t) + 1|\, dt = 0 \text{ et } \lim_{n\to\infty} \int_{\alpha}^{1} |f_n(t) - 1|\, dt = 0\ .$$

d) En déduire que

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } \; \text{-1} \leq t < 0 \\ 1 & \text{si } \; 0 < t \leq 1. \end{cases}$$

e) Prouver finalement que (E;N) n'est pas un espace complet.

Exercice2 (8 points)

Soient (E;d) et (E',d') deux espaces métriques et f : E $\to$E' une application continue.

a) Montrer que si K est une partie compacte de E, alors f (K) l'est aussi.

b) On considère f : R $\to$R définie par f (x) = cosx. Expliciter f $^{-1}$([-1;1]).

c) Montrer que si K est une partie compacte de E
alors f^{-1}(K) n'est pas forcément une partie compacte.

Correction:

Exercice1

b) On prend par exemple $p \geq n$,

$$\begin{aligned} N(f_n - f_p) &= \int_{-1}^{1} |f_n(t) - f_p(t)|\, dt = \int_{-1}^{-\frac{1}{n}} |f_n(t) - f_p(t)|\, dt + \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |f_n(t) - f_p(t)|\, dt \\ &\quad + \int_{\frac{1}{n}}^{1} |f_n(t) - f_p(t)|\, dt \\ &= \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |f_n(t) - f_p(t)|\, dt \leq 2 \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} dt = \frac{4}{n}. \end{aligned}$$

c)

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{-\alpha} |f_n(t) - f(t)|\, dt \leq \lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{+1} |f_n(t) - f(t)|\, dt = 0$$

et aussi

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\alpha}^{+1} |f_n(t) - f(t)|\, dt \leq \lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{+1} |f_n(t) - f(t)|\, dt = 0.$$

De même pour $0<\alpha < 1$ fixé et n assez grand on a $\frac{1}{n} < \alpha$ ou $-\alpha < -\frac{1}{n}$. Ce qui donne

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{-\alpha} |f_n(t) + 1|\, dt = \int_{-1}^{-\alpha} |-1 + 1|\, dt = 0 \text{ et } \lim_{n\to\infty} \int_{\alpha}^{1} |f_n(t) - 1|\, dt = \int_{\alpha}^{1} |f_n(t) - 1|\, dt = 0.$$

d) Par l'unicité de la limite, on déduit que

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \leq t < 0 \\ 1 & \text{si } 0 < t \leq 1. \end{cases} .$$

Exercice2

a) Soit K une partie compacte de E. Soit $(y_n)_{n\in N}$ une suite de $f(K)$, alors il existe une suite $(x_n)_{n\in N}$ de K telle que $y_n = f(x_n)$. Puisque K est compact il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in N}$ de la suite $(x_n)_{n\in N}$ convergente i.e. $x_{n_k} \to x$ et comme f est continue, on déduit que $y_{n_k} = f(x_{n_k}) \to y = f(x)$. $f(K)$ est alors compact.

b)Nous avons f $^{-1}$([-1;1])=$\{x \in [-1,1] : f(x) \in R\} = \{x \in [-1,1] : \cos x \in R\} = R$.

c) Ce qui montre que l'image réciproque d'une partie compacte par une fonction continue n'est pas nécéssairement compacte.