Université de Tlemcen :: Faculté des sciences :: Département de mathématiques

2ème année LMD MI - Mathématiques - (Semestre 3)

Epreuve finale de logique mathématique

17 Janvier 2019 *Durée : 1 h 30 mn*

Questions de cours

1. En parlant d'implication en tant que connecteur logique, on dit implication matérielle ; pour quelle raison ?
2. La phrase attributive « il fait beau aujourd'hui » n'est pas une proposition logique ; pour quelle raison ?
3. Citer une proposition logique vraie dans un cadre mathématique donné et fausse dans un autre.
4. C'est quoi un littéral ?
5. Citer trois termes synonymes de formule propositionnelle contradictoire.
6. Un prédicat à une variable est communément appelé une propriété ; comment est appelé un prédicat à deux variables ?

Exercice 1

Soit la formule propositionnelle

$$A := a \Rightarrow (b \Rightarrow \neg c)$$

où a, b et c sont des atomes.

1. Ecrire une formule propositionnelle B, logiquement équivalente à la formule A, en utilisant uniquement les connecteurs $\neg$ et $\wedge$.
2. Sans dresser une table des valeurs, déduire de la question 1°, les valeurs logiques de la formule A, pour tout système d'assignations.
3. Citer une construction de la formule A.
4. Quel est l'ordre de la formule A ? Justifier.

Exercice 2

Soient S et T deux formules propositionnelles ; établir que

1. $\vDash ((S \Rightarrow T) \Rightarrow S) \Rightarrow S$
2. $(S \Rightarrow T) \Rightarrow S \vdash S$

Exercice 3

Soit A(.) un ion à une place. Considérons la formule prédicative

$$P := A(x) \Rightarrow \exists x\, A(x)$$

1. Etudier la nature des occurrences de variable.
2. Supposons que le champ de l'ion A(.) est

   $$\Omega_A := \{a, b, c\}.$$

   Enumérer les entrées de la table des valeurs de la formule P.
   De combien de lignes, la table des valeurs de P, est-elle formée. Justifier.
3. Montrer que la formule P est valide.

Corrigé

Questions de cours

1. 0.5 pt En parlant d'implication en tant que connecteur logique, on dit implication matérielle pour la distinguer de l'implication de cause à effet.
2. 0.5 pt La phrase attributive « il fait beau aujourd'hui » n'est pas une proposition logique car la véracité (ou la fausseté) de l'attribut est relative.
3. 1 pt La proposition logique « par un point situé à l'extérieur d'une droite (D), il passe une droite et une seule, parallèle à (D) » est vraie dans le cadre de la géométrie euclidienne et fausse dans le cadre de la géométrie de Lobatchevski.
4. 1 pt Un littéral signifie une formule propositionnelle atomique ou le nié d'une formule atomique.
5. 1.5 pt On dit formule contradictoire ou antilogique ou insatisfiable ou identiquement fausse.
6. 0.5 pt Un prédicat à deux variables est communément appelé une relation binaire.

Exercice 1

1. 1.5 pt En vertu des propriétés des connecteurs logiques, et des lois de de Morgan, on obtient les équivalences logiques suivantes

$$A \equiv \neg a \vee (\neg b \vee \neg c) \equiv \neg a \vee \neg (b \wedge c) \equiv \neg (a \wedge (b \wedge c))$$

   Le connecteur $\wedge$ étant associatif, les deux parenthèses intérieures peuvent être omises. On peut donc écrire que

$$A \equiv \neg (a \wedge b \wedge c)$$

2. 1 pt Il découle de l'équivalence logique précédente que le système d'assignations (1, 1, 1) (aux atomes a, b, c, pris dans cet ordre) confère à la formule A, la valeur logique 0. Les sept autres systèmes d'assignations confèrent à la formule A, la valeur logique 1. Inutile donc de dresser une table des valeurs.
3. 1.5 pt Voici une construction de la formule A :

   $A_1 := a$ (atome)

   $A_2 := b$ (atome)

   $A_3 := c$ (atome)

   $A_4 := \neg A_3$

   $A_5 := A_2 \Rightarrow A_4$

   $A_6 := A_1 \Rightarrow A_5$

4. 0.5 pt L'ordre de la formule P est 3. Il s'agit du nombre d'occurrences des connecteurs logiques figurant dans la formule A.

Exercice 2

1. 2 pts Posons

$$P := ((a \Rightarrow b) \Rightarrow a) \Rightarrow a,$$

   où a et b sont des atomes, et

$$Q := ((S \Rightarrow T) \Rightarrow S) \Rightarrow S$$

La formule Q est obtenue, en remplaçant dans la formule P, l'atome a par la formule A et l'atome b par la formule B. Pour prouver que la formule Q est valide, il suffit de prouver que la formule P est valide et d'appliquer le théorème de substitution. Dressons la table des valeurs de la formule P.

a	b	$a \Rightarrow b$	$(a \Rightarrow b) \Rightarrow a$	P
0	0	1	0	**1**
0	1	1	0	**1**
1	0	0	1	**1**
1	1	1	1	**1**

Au vu de la dernière colonne de cette table, la formule P est valide.

2. 2 pts Montrons que la formule S est une déduction formelle de la formule $(S \Rightarrow T) \Rightarrow S$. Considérons en effet la séquence de formules suivantes :

$F_1 := ((S \Rightarrow T) \Rightarrow S) \Rightarrow S$ (formule valide)

$F_2 := (S \Rightarrow T) \Rightarrow S$ (formule hypothèse)

$F_3 := S$ (m.-p. (F_2, F_1))

Exercice 3

1. 1 pt La première occurrence de x est libre et la seconde est liée par le quanteur existentiel. Pour éviter la confusion, réécrivons la formule P comme suit :

$$P := A(y) \Rightarrow \exists x\, A(x)$$

2. 3 pts La table des valeurs de la formule prédicative P admet en entrée :

– les fonctions logiques associées à l'ion A(.) et au domaine Ω_A,

– les éléments de Ω_A, attribués à tour de rôle à y.

Une quelconque fonction logique associée à l'ion A(.) et au domaine Ω_A, s'écrit

$$\varphi(t) := \begin{cases} v_1 & \text{si } t = a \\ v_2 & \text{si } t = b \\ v_3 & \text{si } t = c \end{cases}$$

où v_1, v_2 et v_3 sont des valeurs logiques. Selon le principe fondamental d'arithmétique, le nombre de ces fonctions est : 2*2*2 = 8. Et d'après le même principe, la table des valeurs du prédicat P est constituée de 8*3 = 24 lignes.

3. 3 pts Montrons que la formule P est valide. Considérons pour cela, un domaine Ω, de l'ion A(.) de cardinal non nul n, arbitrairement fixé et montrons que la formule prédicative P est n-valide. Associons à l'ion A(.) une quelconque fonction logique φ, définie sur Ω et attribuons à y, un quelconque élément c, de Ω. La valeur logique de A(y) est $\varphi(c)$. Distinguons deux cas.

   - La valeur logique de l'ion $\exists x\, A(x)$ est 1. Dans ce cas la valeur logique du prédicat P est trivialement, 1 (quelque soit la valeur logique $\varphi(c)$.)
   - La valeur logique de l'ion $\exists x\, A(x)$ est 0. Ceci signifie que, pour tout $t \in \Omega$, $\varphi(t) = 0$, et en particulier $\varphi(c) = 0$. La valeur logique du prédicat P est donc 1.

Ce qu'il fallait démontrer.