UABT
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques 17 /01/19
L2.MATH

Analyse III **Epreuve finale (Durée 02h)**
Sujet& corrigé

Exercice 01 : 07 pts

I. Soit la série entière réelle : $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{4n}}{(4n)\,!}$.

1. Déterminer le rayon R et le domaine de convergence D de la série entière.
2. Pour tout $x \in D$, $soit\ S(x)$ la somme de la série entière , montrer qu'elle vérifie les équations différentielles: $S(x) - S''(x) = cosx$ et $S(x)) + S''(x) = chx$, en déduire l'expression de $S(x)$ sans le signe $\sum$.
3. Calculer les somme des séries $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(4n)\,!}$, $\sum_{n\geq 1} \frac{4^n}{(4n-1)\,!}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{n-1}{(4n-3)\,!}$.

II.

1. Développer en série entière autour de l'origine la fonction $f(x) = \frac{3(ch2x-2sin^2x-1)}{4x^4}$ $pour\ x \neq 0$ et $f(0) = 1$ .Préciser le rayon de convergence de la série obtenue.
2. Montrer que l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx$ converge et donner sa valeur sous forme de série.

Exercice 02: 07 pts

On considère la fonction f : ℝ → ℝ de période P = 2π et telle que :
$f(x) = \pi^2 - x^2 \quad -\pi < x < \pi$

1) Dessiner le graphe de f (on prendra au moins $x \in [-2\pi, 2\pi]$).
2) Calculer la série de Fourier associée à f , étudier sa convergence et donner sa limite. Converge-t-elle uniformément sur ℝ ?
3) Calculer les sommes : $S_1 = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$, $S_2 = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ et $S_3 = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}$, $S_4 = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n+1)^4}$
4) Trouver une solution particulière de classe C^2 et de période P= 2π de l'équation différentielle (E): $y" - 3y = f(x)$.

Question facultative : Donner la solution générale de (E).

Exercice 03 : 06 pts

Etudier la nature des intégrales impropres suivantes :

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{|sinx|\,dx}{\sqrt{(x+5)arctanx^2}} \qquad I_2 = \int_0^1 \frac{ln(x)dx}{\sqrt{\pi-2arcsinx}} \qquad I_3 = \int_0^{+\infty} 1 + 2x^2 ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\, dx$$

Corrigé

Exercice 01 : 07 pts

I. La série entière $\sum_{n\geq 0}\frac{x^{4n}}{(4n)\,!}=\sum_{n\geq 0}a_n(x-x_0)^n$ $avec$ $\begin{cases} x_0=0 \\ \forall n, a_{4n}=\frac{1}{(4n)\,!}, \; a_{4n+1}=a_{4n+2}=a_{4n+3}=0 \end{cases}$

1,5pts 1. Le rayon et domaine de convergence

- $lim_{n\to+\infty}|\,a_{4n}|^{\frac{1}{4n}}=lim_{n\to+\infty}\frac{\mathbf{1}}{\frac{\mathbf{4n}}{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{e}^{\frac{ln(8\pi n)}{8n}}}=\mathbf{0}$
- $lim_{n\to+\infty}|\,a_{4n+k}|^{\frac{1}{4n+k}}=0\;\; pour\;\; \mathrm{k}=1,2,3.$

Alors $limsup_{n\to+\infty}|\,a_n|^{\frac{1}{n}}=0$, alors le rayon $R=+\infty$,ainsi le domaine de convergence $D=\mathbb{R}$

02pts 2. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $soit\; S(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{x^{4n}}{(4n)\,!}=1+\frac{x^4}{(4)\,!}+\frac{x^8}{(8)\,!}+\cdots$

$S'(x)=\sum_{n\geq 1}\frac{x^{4n-1}}{(4n-1)\,!}=\frac{x^3}{(3)\,!}+\frac{x^7}{(7)\,!}+\cdots$.

$S''(x)=\sum_{n\geq 1}\frac{x^{4n-2}}{(4n-2)\,!}=\frac{x^2}{(2)\,!}+\frac{x^6}{(6)\,!}+\cdots$

- $S(x)+S''(x)=1+\frac{x^2}{(2)\,!}+\frac{x^4}{(4)\,!}+\frac{x^6}{(6)\,!}+\frac{x^8}{(8)\,!}+\cdots=\sum_{n\geq 0}\frac{x^{2n}}{(2n)\,!}$ =chx…………..(1)
- $S(x)-S''(x)=1-\frac{x^2}{(2)\,!}+\frac{x^4}{(4)\,!}-\frac{x^6}{(6)\,!}+\frac{x^8}{(8)\,!}-\cdots=\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)\,!}$ =cosx…..(2)
- $(1)+(2)=2S(x)$ alors $S(x)=\frac{cosx+chx}{2}$

1,5pts 3. Calcul de sommes

$S(1)=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(4n)\,!}=\frac{cos1+ch1}{2}$,

$S'(\sqrt{2})=\sum_{n\geq 1}\frac{\sqrt{2}^{4n-1}}{(4n-1)\,!}$ $alors$ $\sum_{n\geq 1}\frac{4^n}{(4n-1)\,!}=\sqrt{2}\,S'(\sqrt{2})=\sqrt{2}\left(\frac{sh\sqrt{2}-sin\sqrt{2}}{2}\right)$.

$\sum_{n\geq 1}\frac{n-1}{(4n-3)\,!}=\frac{1}{4}\sum_{n\geq 1}\frac{4n-3-1}{(4n-3)\,!}=\frac{1}{4}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(4n-2)\,!}-\frac{1}{4}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(4n-3)\,!}=\frac{1}{4}\left(S''(1)-S^{(3)}(1)\right)$.

$\sum_{n\geq 1}\frac{n-1}{(4n-3)\,!}=\frac{1}{8}(\,ch1-cos1-sh1-sin1)=\frac{1}{8}(\,\mathrm{e}^{-1}-cos1-sin1)$.

II. **1pt** 1.

$Pour\; x\neq 0, f(x)=\frac{3(ch2x-2sin^2x-1)}{4x^4}=\frac{3(ch2x+cos2x-2)}{4x^4}=\frac{6(S(2x)-1)}{4x^4}=\frac{3}{2x^4}\sum_{n\geq 1}\frac{2^{4n}x^{4n}}{(4n)\,!}$.

$f(x)=\frac{3}{2}\sum_{n\geq 1}\frac{2^{4n}x^{4n-4}}{(4n)\,!}$ qui vérifie $f(0)=1$.

Le rayon de convergence est le même que le rayon de la série $S(2x)$ ie $R=+\infty$.

1pt 2. $\frac{f(x)}{\sqrt{x}}\overset{v(0)}{\backsim}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{1}{2}<1\Rightarrow$ $I=\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx\; est\; convergente$.

$$I=\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx=\int_0^1\frac{3}{2}\sum_{n\geq 1}\frac{2^{4n}x^{4n-4}}{(4n)\,!\sqrt{x}}\,dx=\frac{3}{2}\sum_{n\geq 1}\int_0^1\frac{2^{4n}x^{4n-\frac{9}{2}}}{(4n)\,!}\,dx=\frac{3}{2}\sum_{n\geq 1}\frac{2^{4n}}{(4n)\,!\left(4n-\frac{7}{2}\right)}$$

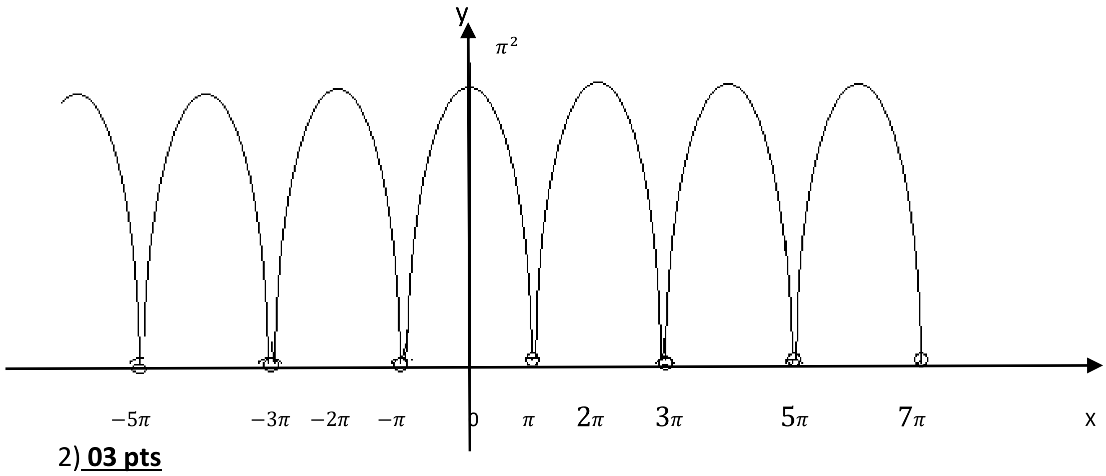
Exercice 02: 07 pts

On considère la fonction f : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de période $\mathrm{P}=2\pi$ et telle que :

$f(x)=\pi^2-x^2 \qquad -\pi<x<\pi$

I._ f : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, paire et de période $\mathrm{P}=2\pi$ et telle que $f(x)=\pi^2-x^2 \qquad -\pi<x<\pi$

1) **0,75pt** le graphe de f :



2) **03 pts**

- f est paire alors $\forall n \geq 1 \;\; b_n = 0$ et $\forall n \geq 0 \; a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f\,(x) cosnx\, dx.$
  - $\forall n \geq 1 \; a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2 - x^2) cosnx \;\, dx = \frac{2}{\pi}\left(\left[(\pi^2 - x^2)\frac{sinnx}{n}\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 2x\frac{sinnx}{n}\; dx \right) =$
    $= \frac{4}{\pi}\left(\left[-x\frac{cosnx}{n^2}\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{cosnx}{n^2}\; dx = \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}.\right.$
  - $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2 - x^2)\; dx = \frac{2}{\pi}\left(\left[\left(\pi^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\right]_0^{\pi}\right) = \frac{4\pi^2}{3}$
- $S\big(f(x)\big) = \frac{2\pi^2}{3} + 4\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} cosnx$
- Comme le montre le graphe , la fonction f est paire et périodique , continue partout sauf aux points $x_k = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$(elle n'est pas définie)

  Il est évident que les conditions de Jordan sont vérifiées à savoir

  $$\begin{cases} i)\;\; f\; est\; bornée\;\; dans\, \mathbb{R} : \forall x \in \;\mathbb{R}\;\; |f(x)| \leq \pi^2 \\ ii) f est\; continue\; et\; croissante\; sur \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\;\; et\;\; continue\; et\; croissante\; sur \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[\end{cases}$$

  Alors $S\big(f(x)\big) = f(x) \quad \forall x \neq x_k$

  $S\big(f(x_k)\big) = \frac{f({x_k}^{+}) + f({x_k}^{-})}{2} = \frac{0+0}{2} = 0 = f(x_k)$

  Ainsi $S\big(f(x)\big) = f(x)\;\; \forall x \in \;\mathbb{R}.$
- $\sum_{n\geq 1}|a_n| = \sum_{n\geq 1}\frac{4}{n^2}$ converge, alors la série $S\big(f(x)\big)$ converge normalement donc uniformément dans $\mathbb{R}$.

3)**01,75pts** Calcul des sommes : $S_1 = \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^2}$, $S_2 = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ et $S_3 = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^4}$, $S_4 = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{(2n+1)^4}$

- ✓ $S\big(f(0)\big) = \frac{2\pi^2}{3} + 4\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = f(0) = \pi^2 \;\Rightarrow S_1 = -\frac{\pi^2}{12}$
- ✓ $S\big(f(\pi)\big) = \frac{2\pi^2}{3} + 4\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}(-1)^n}{n^2} = 0 \Rightarrow \; S2 \; = \; \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$
- Application de l'égalité de Parseval

  $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n\geq 1 \geq} a_n^2 = \frac{8\pi^4}{9} + 16\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^4} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(x)\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x^4 + \pi^4 - 2\pi^2 x^2)\, dx = \frac{16\pi^4}{15}.$

alors $S_3 = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^4} = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{2^4 n^4} + \sum_{n\geq 1}\frac{1}{(2n+1)^4}$ alors $S_4 = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$

II. **01.5pts**Soit $y = y(x)$ une solution particulière de l'équation différentielle $(E) : y" - 3y = f(x)$

Si y est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et de période $2\,\pi\; alors$ les conditions de Dirichlet sont satisfaits (y et y''sont continues et bornées dans $\mathbb{R}$) donc y et y'' sont développables en série de Fourier.

_ Comme f est paire ; il est évident de chercher une solution y de (E) qui soit paire car : $y\; est$ paire $\Rightarrow y"est\; paire \Rightarrow y" - y\; est\; paire$

Soit $a_n(y) les$ coefficients de Fourier de y et $a_n(y")etles$ coefficients de Fourier de $y"$.

y est de classe C^2 et $2\pi -$ périodique alors $\underline{y(0) = y(2\pi)\;,\; y'(0) = y'(2\pi)\; et\; y"(0) = y"(2\pi)}$

- $a_n(y") = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y"(x)cosnx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\underbrace{[y'(x)cosnx]_0^{2\pi}}_{0} + n\int_0^{2\pi} y'(x)sinnx\,dx\right].$

$$= \frac{n}{\pi}\left[\underbrace{[y(x)sinnx]_0^{2\pi}}_{0} - n\int_0^{2\pi} y(x)cosnx\,dx\right] = -n^2 a_n(y)\ \forall n \geq 1.$$

- $a_0(y") = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y"(x)dx = \frac{1}{\pi}[y'(x)cosnx]_0^{2\pi} = 0$

1) **01pt** En remplaçant dans (E) on obtient :

$$a_n(y" - 3y) = a_n(y") - 3a_n(y) = -(n^2+3)a_n(y) = a_n(f) \quad \forall n \geq 0$$

D'où $a_n(y) = \frac{-a_n(f)}{(n^2+3)}$ $\forall n \geq 0$ Ainsi : $y(x) = -\frac{2\pi^2}{9} - 4\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2(n^2+3)}cosnx$

La solution générale de (1) s'écrit : $y(x) = C_1 e^{\sqrt{3}x} + C_2 e^{-\sqrt{3}x} - \frac{2\pi^2}{9} - 4\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2(n^2+3)}cosnx$

$C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}$.

Exercice 03 : 06 pts Nature des intégrales impropres

02.5 pts $I_1 = \int_0^{+\infty}\frac{|sinx|\,dx}{\sqrt{(x+5)arctanx^2}} = \int_0^{+\infty} f(x)dx.$

- $f(x) \overset{v(0)}{\simeq} \frac{|x|}{\sqrt{5x^2}}$, $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow x = 0\ n'est\ pas\ un\ point\ singulier\ pour\ f.$
- $f(x) \geq \frac{sin^2x}{\sqrt{(x+5)arctanx^2}} = \frac{1-cos2x}{\sqrt{(x+5)arctanx^2}} = \frac{1}{\sqrt{(x+5)arctanx^2}} - \frac{cos2x}{\sqrt{(x+5)arctanx^2}} = g(x) - j(x)$

  $g(x) = \frac{1}{\sqrt{(x+5)arctanx^2}} \overset{v(+\infty)}{\simeq} \frac{k}{x^{\frac{1}{2}}}\ avec\ k = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5\pi}}$ alors $\int_0^{+\infty} g(x)dx$ diverge.

  $j(x) = \frac{cos2x}{\sqrt{(x+5)arctanx^2}}$,on applique le critère d' Abel pour $\int_0^{+\infty} j(x)dx$
- on pose $j(x) = l(x)h(x)$,

$$\begin{cases} \forall x > 0\ ,\ h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(x+5)arctanx^2}} \searrow\ et\ \lim_{x\to+\infty} h(x) = 0 \\ \forall x", x' \in \mathbb{R}^+ \left|\int_{x'}^{x"} l(x)\,dx\right| \left|\int_{x'}^{x"} cos2x\,dx\right| = \dfrac{1}{2}|sin2x" + sin2x'| \leq 1 \end{cases}$$

Alors $\int_0^{+\infty} j(x)dx$ ***converge*** **; ainsi** I_1 ***diverge.***

02pts. $I_2 = \int_0^1 \frac{ln(x)dx}{\sqrt{\pi - 2arcsinx}} = \int_0^1 f(x)dx$

- $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty \Rightarrow x = 0\ \ est\ \ un\ point\ singulier\ pour\ f.$
- Le développement de $arcsinx$ au voisinage de 1 :

  Sin t $\overset{v(\frac{\pi}{2})}{\simeq} 1 - \frac{\left(t-\frac{\pi}{2}\right)^2}{2}$ alors $\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2 \overset{v(\frac{\pi}{2})}{\simeq} 2(1 - sint)$

d'où $\left|t - \frac{\pi}{2}\right| \sim \sqrt{2(1-sint)}$, en posant $x = sint\ 0 \leq x \leq 1\ et\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{2} - t \sim \sqrt{2(1-sint)}$ d'où $t = arcsinx \sim \frac{\pi}{2} - \sqrt{2(1-x)}$

$lnx \overset{v(1)}{\simeq} x - 1$ alors $f(x) \overset{v(1)}{\simeq} -\frac{(1-x)^{\frac{3}{4}}}{2^{1/4}}$ $\lim_{x\to 1} f(x) = 0 \Rightarrow x = 1\ n'est\ pas\ \ un\ point\ singulier.$

$\lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}ln(x)}{\sqrt{\pi}} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{I_2}$ ***converge*** .

1,5pts $I_3 = \int_0^{+\infty} 1 + 2x^2 ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\ dx = \int_0^{+\infty} f(x)dx..$

- $\lim_{x\to 0} f(x) = 1 + 2\lim_{x\to 0} x^2 ln\,x = 1 \Rightarrow x = 0\ \ n'est\ pas\ \ un\ point\ singulier\ pour\ f.$
- $f(x) = 1 - x^2 ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) = 1 - x^2 ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \overset{v(+\infty)}{\simeq} 1 - x^2\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x^4}\right))$
- $f(x) \overset{v(+\infty)}{\simeq} \frac{1}{2x^2}, \alpha = 2 > 1$ Alors $\boldsymbol{I_3}$ **converge.**