Dept. Mathématiques
Faculté des Sciences
Tlemcen
A. U. 2018-19.

Contrôle de topologie

(Durée 1h30)

Exercice1 (4 points)

Soient A et B deux parties d'un espace métrique X.

Montrer que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

et $A^o \cup B^o \subset (A \cup B)^o$ (donner un exemple où l'inclusion est stricte).

Exercice2 (5 points)

On considère l'ensemble Z des entiers non nuls et l'application

$d : Z^* \times Z^* \to R^+$

$(n, m) \to \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right|$

a) Montrer que d est une distance sur Z^* .

b) Soient $a \in Z^*$, $\epsilon \in R^{+*}$ et $B(a, \epsilon)$ la boule ouverte de centre a et de rayon ϵ. Montrer que

$$n \in B(a, \epsilon) \Leftrightarrow \frac{1}{a} - \epsilon < \frac{1}{n} < \frac{1}{a} + \epsilon.$$

c) Décrire explicitement $B(1, 1)$, $B(1, \frac{1}{2})$.

Exercice3 (6 points)

On considère $E = C^0([0, 1], R)$ l'ensemble des applications continues de $[0, 1]$ dans R . Pour tout $f \in E$, on pose

$$\|f\| = \int_0^1 |f(t)|\, dt.$$

1) Montrer que $\|.\|$ est une norme sur E.

2) Pour tout $n \in N$, on pose $f_n(x) = x^n$.

Montrer que la suite $(f_n)_{n \in N}$ converge dans $(E, \|.\|)$ vers la fonction nulle.

3) Montrer qu'en tant que suite de fonctions, la suite $(f_n)_{n \in N}$ ne converge pas vers la fonction nulle.

Exercice4 (5 points)

Soient X et Y deux espaces métriques et $f : X \to Y$ une application continue.

Montrer que

$\forall B \subset Y$, $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}\left(\overline{B}\right)$ et $f^{-1}(B^o) \subset \left(f^{-1}(B)\right)^o$.

Corrections

Exercice1

Montrons que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Nous avons $A \subset \overline{A}$ et $B \subset \overline{B} \Rightarrow A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ et puisque $\overline{A \cup B}$ est le plus petit fermé contenant $A \cup B$, on déduit que $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.

Nous avons aussi $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$ ce qui donne $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ et $\overline{B} \subset \overline{A \cup B} \Rightarrow \overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.

La relation $A^o \cup B^o \subset (A \cup B)^o$ découle du fait que $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B \Rightarrow A^o \subset (A \cup B)^o$ et $B^o \subset (A \cup B)^o \Rightarrow A^o \cup B^o \subset (A \cup B)^o$. Cette dernière relation est en général stricte comme le montre l'exemple suivant:

$A = [0, 1]$ et $B = [1, 2] \Rightarrow A \cup B = [0, 2]$, $A^o =]0, 1[$, $B^o =]1, 2[$ $\Rightarrow (A \cup B)^o =]0, 2[$ et $A^o \cup B^o =]0, 1[\cup]1, 2[=]0, 2[- \{1\}$.

Exercice2

a) d est une distance sur Z^*

i) $d(n, m) = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{n} - \frac{1}{m} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{n} = \frac{1}{m} \Leftrightarrow n = m$

ii) $d(n, m) = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| = d(m, n)$

iii) $\forall n, m, p \in Z^*$, $d(n, m) = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p} - \frac{1}{m}\right| \leq \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{p}\right| + \left|\frac{1}{p} - \frac{1}{m}\right| = d(n, p) + d(p, m)$.

b) Pour $a \in Z^*$, $\epsilon \in R^{+*}$ et $B(a, \epsilon) = \left\{n \in Z^* : \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{a}\right| < \epsilon\right\}$, ona:

$n \in B(a, \epsilon) \Leftrightarrow \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{a}\right| < \epsilon \Leftrightarrow -\epsilon < \frac{1}{n} - \frac{1}{a} < \epsilon \Leftrightarrow -\epsilon + \frac{1}{a} < \frac{1}{n} < \epsilon + \frac{1}{a}$

c) $n \in B(1, 1) \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{n} < 2 \Leftrightarrow n \in Z^{*+}$ i.e. $B(1, 1) = Z^{*+}$ et $n \in B(1, \frac{1}{2}) \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{n} < \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{3} < n < 2 \Leftrightarrow n = 1$ i.e. $B(1, \frac{1}{2}) = \{1\}$.

Exercice3

1) $\|.\|$ est une norme sur E.

Remarqu'on d'abord que $\|.\|$ est bien définie puisque la $t \to |f(t)|$ est continue et donc intégrable sur $[0, 1]$.

i) $\|f\| = \int_0^1 |f(t)|\, dt = 0 \Leftrightarrow f(t) = 0$, $\forall t \in [0, 1] \Leftrightarrow f = 0$.

ii) $\forall \lambda \in R$, $\|\lambda f\| = \int_0^1 |\lambda f(t)|\, dt = |\lambda| \int_0^1 |f(t)|\, dt = |\lambda| \, \|f\|$.

iii) $\forall f, g \in E \quad \|f + g\| = \int_0^1 |f(t) + g(t)|\, dt \leq \int_0^1 |f(t)|\, dt + \int_0^1 |g(t)|\, dt = \|f\| + \|g\|$.

2) Convergence de $(f_n)_n$ dans $(E, \|.\|)$.

$\|f_n\| = \int_0^1 |f_n(t)|\, dt = \int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1} \to 0$ quand $n \to \infty$.

3) On a pour $0 \leq x < 1$ $\underset{n \to \infty}{lim} x^n = 0$ et alors $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x = 1 \\ 0 & \text{pour } 0 \leq x < 1 \end{cases}$.

Exercice

Puisque $f : X \to Y$ une application continue et que $\overline{B}$ est fermé dans Y alors $f^{-1}\left(\overline{B}\right)$ est un fermé de X. Par ailleurs $f^{-1}(B) \subset f^{-1}\left(\overline{B}\right)$ et que $\overline{f^{-1}(B)}$ est le plus petit fermé contenant $f^{-1}(B)$, on déduit que $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}\left(\overline{B}\right)$.

De même B^o étant un ouvert de Y alors $f^{-1}(B^o)$ est un ouvert de X contenu dans $f^{-1}(B)$ et puisque $f^{-1}(B)^o$ est le plus grand ouvert contenu dans $f^{-1}(B)$, on déduit que $f^{-1}(B^o) \subset f^{-1}(B)^o$.