Faculté des Sciences — 2018/2019
Département de Mathématiques — Durée: 90 mn

Contrôle continu d'analyse numérique 1
Corrigé

Exercice 1

1. Dans une arithmétique flottante à 4 chiffres avec arrondi, déterminer l'erreur absolue, l'erreur relative et le nombre de chiffres significatifs de $\pi = 3.14159$.
2. Réécrire les formules suivantes afin d'éviter les erreurs d'annulations
   a. $\ln(1+x) - \ln(x)$, $\quad x$ grand
   b. $\dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$, $\qquad x$ proche de 0
   c. $\sqrt[3]{1+x} - 1$, $\qquad x$ proche de 0
3. Déterminer l'ordre de convergence de la suite $(x_n)_n$ convergeant vers $\dfrac{1}{\pi}$ suivante:
   $x_{n+1} = x_n(2 - \pi x_n), \quad n = 0, 1, \ldots$

Solution

1. $\pi = 3.14159 \Rightarrow fl(\pi) = 0.3142 \times 10$

L'erreur absolue

$$|\pi - fl(\pi)| = |3.14159 - 0.3142 \times 10| = 0.000\,41 = 0.41 \times 10^{-3}$$

L'erreur relative

$$\frac{|\pi - fl(\pi)|}{\pi} = \frac{0.41 \times 10^{-3}}{3.14159} = 0.130\,51 \times 10^{-3}$$

Chiffres significatifs

Comme $|\pi - fl(\pi)| = 0.41 \times 10^{-3} \leq 0.5 \times 10^{-3}$, alors $fl(\pi)$ posséde 3 chiffres significatifs exactes $3, 1$ et 4.

2.a. En utilisant les propriétés de la fonction logarithme on a

$$\ln(1+x) - \ln(x) = \ln\left(\frac{1+x}{x}\right) = \ln(1 + \frac{1}{x})$$

b. En utilisant le développement de Taylor de la fonction cosinus au voisinage de 0

$$\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

$$\begin{aligned}\frac{1-\cos(x)}{x^2} &\approx \frac{1 - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right)}{x^2} \\ &\approx \frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!}\end{aligned}$$

c. En utilisant l'identité

$$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right),$$

on peut éviter l'erreur d'annulation comme suit:

$$\sqrt[3]{1+x}-1=\frac{x}{\left((1+x)^{\frac{2}{3}}+(1+x)^{\frac{1}{3}}+1\right)}$$

3. On a $x_{n+1}-\dfrac{1}{\pi}=x_n(2-\pi x_n)-\dfrac{1}{\pi}=-\pi x_n^2+2x_n-\dfrac{1}{\pi}=-\pi(x_n-\dfrac{1}{\pi})^2$. Il s'en suit que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|x_{n+1}-\frac{1}{\pi}\right|}{\left|x_n-\frac{1}{\pi}\right|^k}=\lim_{n\to\infty}\pi\left|x_n-\frac{1}{\pi}\right|^{2-k}$$

Si $k<2$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\left|x_{n+1}-\frac{1}{\pi}\right|}{\left|x_n-\frac{1}{\pi}\right|^k}=0$$

Si $k=2$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\left|x_{n+1}-\frac{1}{\pi}\right|}{\left|x_n-\frac{1}{\pi}\right|^2}=\pi$$

Si $k>2$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\left|x_{n+1}-\frac{1}{\pi}\right|}{\left|x_n-\frac{1}{\pi}\right|^k}=+\infty$$

Donc, l'ordre de convergence de la suite $(x_n)_n$ vers $\dfrac{1}{\pi}$ est égal à **2.**

Exercice 2

1. Montrer l'unicité du polynôme d'interpolation de Lagrange p_n, passant par les points $(x_i,y_i)_{0\leq i\leq n}$.

2. Trouver la forme de Lagrange du polynôme d'interpolation de la fonction $f(x)=\sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$ aux points $0,1,2$.

3. Puis, borner l'erreur d'interpolation pour tout $0\leq x\leq 2$.

Solution

1. Supposons que p_n et q_n sont deux polynômes de degré $\leq n$ interpolant les points $(x_i,y_i)_{0\leq i\leq n}$.
alors $p_n(x_i)=q_n(x_i)=y_i$ pour tout $0\leq i\leq n$.
Soit $Q(x)=p_n(x)-q_n(x)$ alors $Q(x)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à n.
De plus $Q(x_i)=0$ pour tout $0\leq i\leq n$.
Donc $Q(x)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à n qui admet $n+1$ racines, il est identiquement nul. D'où l'unicité du polynôme.

2. On pose $x_0 = 0, x_1 = 1$ et $x_2 = 2$ alors

$$p_2(x) = \sum_{i=0}^{2} f(x_i) l_i(x)$$

avec

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{2} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Comme $f(x_i) = \sin\left(\frac{\pi x_i}{2}\right) = 0$ pour $i = 0, 2$ et $f(x_1) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ alors

$$p_2(x) = l_1(x) = -x\,(x-2)$$

3. On sait que pour tout $x \in [1, 2]$ il existe $\xi(x) \in \,]1, 2[$ tel que

$$f(x) - p_2(x) = \frac{f^{(3)}(\xi(x))}{3!}\,(x)\,(x-1)\,(x-2)$$

Comme $f^{(3)}(x) = -\frac{\pi^3}{8} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ et puisque $\left|\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right| \leq 1$ alors

$$|f(x) - p_2(x)| \leq \frac{\pi^3}{48}\,|(x)\,(x-1)\,(x-2)|$$

Reste à majorer $|(x)\,(x-1)\,(x-2)|$, pour cela on pose, pour tout $x \in [0, 2]$, $g(x) = x\,(x-1)\,(x-2)$

alors $g'(x) = 3x^2 - 6x + 2$, l'équation $g'(x) = 0$ a pour solution $s_1 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \in [0, 2]$ et $s_2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \in [0, 2]$

donc $\max\limits_{x \in [0,2]} |g(x)| = \max\{|g(s_1)|, |g(s_2)|\} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

En conclusion

$$|f(x) - p_2(x)| \leq \frac{\pi^3\sqrt{3}}{216}$$

Exercice 3

On considère l'itération du point fixe

$$x_{n+1} = \frac{x_n\,(x_n^2 + 6)}{3x_n^2 + 2} \qquad n = 0, 1, \ldots$$

1. Montrer que l'itération converge pour tout choix de $x_0 \in [1, 2]$.
2. Quel est l'ordre de convergence de cette suite?
3. En appliquant la méthode de Newton à $f(x) = (x-1)\,(x-2)^2$ avec x_0 proche de $\alpha = 2$, que valent les limites suivantes:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^2} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^3}$$

Solution

1. On pose

$$g(x) = \frac{x\left(x^2+6\right)}{3x^2+2} \quad , x \in [1,2]$$

i) g est une fonction continue sur $[1,2]$, de plus $g(1) = \dfrac{7}{5} \in [1,2] \qquad g(2) = \dfrac{20}{14} \in [1,2]$

et comme $g'(x) = 3\frac{\left(x^2-2\right)^2}{\left(3x^2+2\right)^2} > 0$ alors la fonction g est strictement croissante sur $[1,2]$ et $g([1,2]) \subset [1,2]$

ii) $g''(x) = 96x\frac{x^2-2}{\left(3x^2+2\right)^3}$d'où $g''(x) = 0$ pour $x = -\sqrt{2} \notin [1,2]\,, x = 0 \notin [1,2]$ et $x = +\sqrt{2} \in [1,2]$. Il s'ensuit que

$$\max_{x\in[1,2]} |g'(x)| = \max\left\{|g'(1)|\,, \left|g'(\sqrt{2})\right|, |g'(2)|\right\} = \max\left\{\frac{3}{25}, \frac{12}{(14)^2}\right\} < 1$$

donc $\forall x \in [1,2] \qquad |g'(x)| < 1$.

Donc les hypothèses du théorème du point fixe sont vérifiées et l'itération converge pour tout choix de $x_0 \in [1,2]$.

2. Tout d'abord il faut trouver le point fixe α .

L'équation $g(x) = x$ admet comme solutions $-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0$. Le point fixe cherché est $\alpha = \sqrt{2}$.

Nous avons d'après les expressions des dérivées g' et g'', $g'(\sqrt{2}) = 0$ et $g''(\sqrt{2}) = 0$.

Or $g'''(x) = -\dfrac{96}{\left(3x^2+2\right)^4}\left(9x^4 - 36x^2 + 4\right) \qquad$ donc $g'''(\sqrt{2}) \neq 0$.

Il en découle que l'ordre de convergence de la suite vers α est **3**.

3. Comme $\alpha = 2$ est une **racine double** , la convergence de la méthode de Newton est linéaire.

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|} = \frac{1}{2} \qquad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|^2} = +\infty \qquad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|^3} = +\infty$