



CONTROLE CONTINU (durée 02h)

Exercice 1 : (06pts)

Etudier la nature et calculer en cas de convergence la somme des séries :

1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{chnx}{2^n(chx)^n}$ ($x \in \mathbb{R}$) 2) $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{lnn} \left(\sum_n^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)$ 3) $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1})$

Exercice 2 : (06pts)

1. Soit $u_n(x) = \frac{(-1)^n(3x-1)^{2n}}{n(2n-1)}$ $x \in \mathbb{R}$ $n \geq 1$. On pose $v_n(x) = u'_n(x)$.

Déterminer le rayon R et le domaine de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$

2. Calculer la somme $V(x) = \sum_{n \geq 1} v_n(x)$ et $\int_{\frac{1}{3}}^x V(t) dt$ pour $|x - \frac{1}{3}| < R$.

en déduire la somme $U(x) = \sum_{n \geq 1} u_n(x)$ et $S = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n(2n-1)}$.

Combien faut-il prendre de termes dans la série pour obtenir une valeur approchée de S à 10^{-2} près et préciser le signe de l'erreur.

3. En utilisant la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{n(2n-1)}$, retrouver la somme $U(x)$.

Exercice 03 : (08 pts)

I. Soit la suite de fonctions définie par $f_n(x) = thx - th(n+1)x$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

1) Etudier la convergence simple et uniforme de la suite $(f_n(x))_n$ dans \mathbb{R} et dans \mathbb{R}^* .

2) Déterminer le plus grand intervalle de convergence uniforme inclus dans \mathbb{R}^+ .

3) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^a f_n(x) dx$ et $\int_0^a \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx$ $a > 0$, conclure !

II. On considère la série de fonctions de terme général

$$u_n(x) = th(n+1)x - thnx, x \in \mathbb{R} \text{ et } n \geq 1 .$$

1) Trouver le domaine de convergence D_c de la série $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$.

2) Etudier la continuité de la somme $U(x) = \sum_{n \geq 1} u_n(x)$ dans D_c , en déduire la nature de convergence de la série sur D_c .

3) Etudier la convergence normale sur l'intervalle $[a, +\infty[$. $a > 0$.

III. Soit la série de terme général $v_n(x) = nu_n(x)$, $x > 0$.

1) Montrer que $\sum_{n \geq 1} v_n(x)$ est convergente pour tout $x > 0$.

2) On pose $V(x) = \sum_{n \geq 1} v_n(x)$, montrer que : $\frac{1}{2(e^{2x}-1)} \leq V(x) \leq \frac{2e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}$.

(on donne $\sum_{n \geq 0} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$)

Corrigé

Exercice 1 : (06pts)

$$1)(02, 5pts) u_n = \frac{chnx}{2^n(chx)^n} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{e^x}{2chx} \right)^n + \left(\frac{e^{-x}}{2chx} \right)^n \right] = \frac{1}{2} [q_1^n + q_2^n]$$

$$\text{avec } \begin{cases} q_1 = \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} & 0 < q_1 < 1 \\ q_2 = \frac{e^{-x}}{e^x + e^{-x}} & 0 < q_2 < 1 \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est la somme de deux séries géométriques convergentes alors elle converge $\forall x \in \mathbb{R}$ et a pour somme :

$$S = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} q_1^n + q_2^n = \frac{1}{2} \left(\frac{q_1}{1-q_1} + \frac{q_2}{1-q_2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{e^x}{2chx}}{1-\frac{e^x}{2chx}} + \frac{\frac{e^{-x}}{2chx}}{1-\frac{e^{-x}}{2chx}} \right) = ch2x.$$

$$2)(02pts) v_n = \frac{1}{lnn} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \right) = \frac{R_{n-1}}{lnn}. \text{ En utilisant le critère de comparaison avec l'intégrale :}$$

• $f(x) = \frac{1}{x^2}$ $x \geq 2$, f est positive, décroissante et continue.

$$\bullet \int_n^{+\infty} f(x) dx = \int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \left[\frac{1}{x} \right]_n^{+\infty} = \frac{1}{n}$$

(1pt) Alors $v_n \sim \frac{1}{n lnn}$, on utilise encore le critère de comparaison avec l'intégrale avec

• $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ $x \geq 2$, f est positive, décroissante et continue.

$$\bullet \int_2^{+\infty} f(x) dx = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \int_{ln2}^{+\infty} \frac{du}{u} = [lnx]_{ln2}^{+\infty} = +\infty$$

(1pt) Alors $\sum_2^{+\infty} v_n$ diverge.

$$3) (01, 5pts) w_n = (-1)^n \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1}) = (-1)^n \sin\left(\pi n \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{1/2}\right).$$

$$w_n = (-1)^n \sin\left(\pi n \left(1 + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n^2} \varepsilon\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \text{ avec } \varepsilon\left(\frac{1}{n^2}\right) \rightarrow 0 \text{ qd } n \rightarrow +\infty$$

$$w_n = (-1)^n \sin\left(\pi n + \frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n} \varepsilon\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n} \varepsilon\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \sim \frac{\pi}{2n}.$$

$\sum_1^{+\infty} \frac{\pi}{2n}$ est une série de Riemman divergente. Alors $\sum_1^{+\infty} w_n$ diverge.

Exercice 2 : (06pts)

$$1. u_n(x) = \frac{(-1)^n (3x-1)^{2n}}{n(2n-1)} = \frac{(-1)^n 3^{2n} \left(x - \frac{1}{3}\right)^{2n}}{n(2n-1)} = \sum_1^{+\infty} a_n (x - x_0)^n \begin{cases} a_{2n} = \frac{(-1)^n 3^{2n}}{n(2n-1)} & a_{2n+1} = 0 \\ x_0 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

(1pt) Le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$

$$\bullet |a_{2n}|^{\frac{1}{2n}} = \frac{3}{[n(2n-1)]^{\frac{1}{2n}}} \rightarrow 3 \text{ qd } n \rightarrow +\infty$$

$$\bullet |a_{2n+1}|^{\frac{1}{2n+1}} = 0 \rightarrow 0 \text{ qd } n \rightarrow +\infty$$

$$\bullet \limsup_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = 3, \text{ alors le rayon } R = \frac{1}{3}$$

(1pt) Le domaine de convergence de $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$

- $\left|x - \frac{1}{3}\right| < \frac{1}{3} \Rightarrow \sum_{n \geq 1} \mathbf{u}_n(x)$ converge.
 - $\left|x - \frac{1}{3}\right| > \frac{1}{3} \Rightarrow \sum_{n \geq 1} \mathbf{u}_n(x)$ diverge.
 - $\left|x - \frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}, |\mathbf{u}_n(x)| = \frac{1}{n(2n-1)} \sim \frac{1}{2n^2} \Rightarrow \sum_{n \geq 1} \mathbf{u}_n(x)$ converge absolument
- Ainsi $D_c = \left[0, \frac{2}{3}\right]$.

2. (0.5pt) $V(x) = \sum_{n \geq 1} \mathbf{v}_n(x) = \sum_{n \geq 1} \mathbf{u}'_n(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n 6(3x-1)^{2n-1}}{(2n-1)} = -6 \mathbf{arctan}(3x-1),$

Pour $\left|x - \frac{1}{3}\right| < \frac{1}{3}$, sachant que $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n X^{2n+1}}{(2n+1)} = \mathbf{arctan}(X)$ avec $|X| \leq 1$

(1pt) $I = \int_{\frac{1}{3}}^x V(t) dt = - \int_{\frac{1}{3}}^x 6 \mathbf{arctan}(3t-1) dt = \int_0^{3x-1} -2 \mathbf{arctan}u du$: intég.par partie

$$I = -[2u \cdot \mathbf{arctan}u]_0^{3x-1} - \int_0^{3x-1} \frac{2u}{1+u^2} du = -[2u \cdot \mathbf{arctan}u - \ln(1+u^2)]_0^{3x-1}.$$

$$I = -2(3x-1) \cdot \mathbf{arctan}(3x-1) + \ln(1+(3x-1)^2).$$

(0.5pt) $U(x) = \sum_{n \geq 1} \mathbf{u}_n(x)$ $U'(x) = \sum_{n \geq 1} \mathbf{u}'_n(x) = V(x)$ (on peut intégrer terme à terme une série entière) $U(x) - \underbrace{U\left(\frac{1}{3}\right)}_0 = \int_{\frac{1}{3}}^x V(t) dt = I$

(0.5pt) D'après le second lemme d'Abel $S = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n(2n-1)} = \lim_{x \rightarrow 0} U(x) = -2 \mathbf{arctan}1 + \ln 2 = \ln 2 - \frac{\pi}{2}$

(0.5pt) $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n(2n-1)}$ est une série alternée, son reste vérifie $|R_n| \leq \frac{1}{(n+1)(2n+1)}$

$$\frac{1}{(n+1)(2n+1)} \leq 10^{-2} \text{ pour } n \geq 7$$

(0.5pt) Le signe de l'erreur R_7 est le signe de son premier terme \mathbf{u}_8 donc positif

3. (01pt) En utilisant la décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{n(2n-1)} = \frac{-1}{n} + \frac{2}{(2n-1)}, U(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n (3x-1)^{2n}}{n(2n-1)} = - \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n (3x-1)^{2n}}{n} + 2 \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n (3x-1)^{2n}}{(2n-1)}$$

$$= \ln(1+(3x-1)^2) - 2(3x-1) \cdot \mathbf{arctan}(3x-1) \text{ pour } |3x-1| < 1, \text{ sachant que :}$$

$$\sum_{n \geq 1} \frac{X^n}{n} = -\mathbf{Ln}(1-X) \text{ et } \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n X^{2n-1}}{(2n-1)} = \mathbf{arctan}X \text{ pour } |X| < 1.$$

Exercice 03 : (08 pts)

i. 1) (1.25pt) **Convergence simple :** $f_n(x) = thx - th(n+1)x, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} thx - 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ thx + 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

La suite $(f_n)_n$ converge simplement sur \mathbb{R} vers f .

- (0.25pt) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1 \neq f(0)$ alors f n'est pas continue au point $x=0$.
- (0.5pt) Comme la suite $(f_n)_n$ est une suite de fonctions continues sur \mathbb{R} , alors la convergence n'est pas uniforme dans \mathbb{R} .
- (0.5pt) Dans \mathbb{R}^* , soit la suite $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^*$ $x_n = \frac{1}{n+1}$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_n) - f(x_n) = 1 \neq 0$

Alors la convergence n'est pas uniforme dans \mathbb{R}^* .

2) (0.75pt) Le plus grand intervalle de convergence uniforme inclus dans \mathbb{R}^+ est $[a, +\infty[$, en

$$\text{effet : } \forall x \in [a, +\infty[, \quad |f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{2e^{-2(n+1)x}}{1+e^{-2(n+1)x}} \right| \leq 2e^{-2(n+1)a} \rightarrow 0 \quad n \rightarrow +\infty$$

$$\text{alors} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\| = 0$$

$$3) (01pt) \int_0^a f_n(x) dx = \int_0^a thx - th(n+1)x dx = \left[\ln(chx) - \frac{\ln(ch(n+1)x)}{(n+1)} \right]_0^a =$$

$$= \ln(cha) - \frac{\ln(ch(n+1)a)}{(n+1)} \rightarrow \ln(cha) - a \quad n \rightarrow +\infty \text{ car } \frac{\ln(ch(n+1)a)}{(n+1)} \underset{v(+\infty)}{\sim} \frac{\ln(e^{(n+1)a})}{(n+1)} = a$$

$$\int_0^a \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx = \int_0^a thx - 1 dx = [\ln(chx) - x]_0^a = \ln(cha) - a$$

(0.25pt) On remarque que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^a f_n(x) dx = \int_0^a \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx$ et pourtant la convergence n'est pas uniforme sur $[0, a]$. L'égalité des intégrales n'implique pas la convergence uniforme de la suite de fonctions. (La réciproque du critère d'intégrale est fausse)

$$\text{II.} \quad u_n(x) = th(n+1)x - thnx, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{et } n \geq 1.$$

1) La série $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ est une série télescopique.

(01pt) $S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x) = th(n+1)x - thx = -f_n(x)$, alors Le domaine de convergence

$$D_c = \mathbb{R}.$$

2) (0.5pt) $U(x) = \sum_{n \geq 1} u_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = -f(x)$ qui n'est pas continue sur \mathbb{R} ,

comme la série $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ est une série de fonctions continues sur \mathbb{R} , alors la convergence n'est pas uniforme sur \mathbb{R} .

3) 01pt) Soit $a > 0$, $\|u_n\| = \sup_{[a, +\infty[} |u_n(x)| = \sup_{[a, +\infty[} th(n+1)x - thnx$

La fonction $th(\cdot)$ est croissante dans \mathbb{R} ($th'(x) = \frac{1}{ch^2(x)} > 0 \forall x \in \mathbb{R}$), ainsi

$$\forall x \geq a \quad thnx \geq thna \quad \text{et} \quad th(n+1)x \leq 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} th(n+1)x$$

$$\text{Alors } \|u_n\| \leq 1 - thna = \frac{2e^{-na}}{e^{na} + e^{-na}} \leq 2e^{-na} = C_n = 2(e^{-a})^n$$

$\sum C_n$ est une série géométrique convergente alors $\sum \|u_n\|$ converge ou $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ converge normalement sur $[a, +\infty[$

$$\text{III.} \quad v_n(x) = nu_n(x), \quad x > 0.$$

1) (0.5pt) $\forall x > 0 \quad 0 \leq v_n(x) \leq 2ne^{-nx} = b_n$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n)^{\frac{1}{n}} = e^{-x} < 1 \Rightarrow \sum b_n$ converge.

Alors $\sum_{n \geq 1} v_n(x)$ est convergente pour tout $x > 0$.

$$2) (0.5pt) \quad v_n(x) = n \left(\frac{e^{(n+1)x} - e^{-(n+1)x}}{e^{(n+1)x} + e^{-(n+1)x}} - \frac{e^{nx} - e^{-nx}}{e^{nx} + e^{-nx}} \right) = 2n \frac{(e^x - e^{-x})e^{-(2n+1)x}}{(1+e^{-2(n+1)x})(1+e^{-2nx})}$$

$$v_n(x) \leq 2n(1 - e^{-2x})e^{-2nx} \Rightarrow \sum_{n \geq 1} v_n(x) \leq 2 \frac{(1 - e^{-2x})e^{-2x}}{(1 - e^{-2x})^2} \leq \frac{2e^{-2x}}{e^{-4x}(e^{2x} - 1)^2} = \frac{2e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^2}$$

$$v_n(x) \geq \frac{n(1 - e^{-2x})e^{-2nx}}{2} \Rightarrow V(x) \geq \frac{(1 - e^{-2x})e^{-2x}}{2(1 - e^{-2x})^2} = \frac{1}{2(e^{2x} - 1)}.$$

$$\text{Ainsi on a: } \frac{1}{2(e^{2x} - 1)} \leq V(x) \leq \frac{2e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^2}.$$