

Partiel du module "Algèbre 3"

durée : 2 heures

Exercice n° 1 (10)

Soient v_1, \dots, v_2 2 vecteurs linéairement indépendants de \mathbb{K}^n ,
 $A = \|v_1, \dots, v_2\|$, δ un mineur d'ordre 2 non nul extrait de A et $w \in \mathbb{K}^n$.
 Montrez que si les cofacteurs de δ dans la matrice $B = \|v_1, \dots, v_2, w\|$ sont
 nuls alors $w \in [v_1, \dots, v_2]$

Exercice n° 2 (10)

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Déterminer une matrice P inversible et une matrice A' diagonale telles
 que $A' = P^{-1}AP$ et calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice n° 3 (10)

Expliquez sans calculs pourquoi $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable

Exercice n° 4 (10)

Soit $m \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 1+m & 1+m & 1 \\ -m & -m & -1 \\ m & m-1 & 0 \end{pmatrix}$

1/ Montrez que $P_A(x) = -(x+1)(x-1)^2$

2/ Pour quelles valeurs de m , A est-elle diagonalisable ?

Exercice n° 5 (10)

Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, montrez que A est diagonalisable sur \mathbb{R} .

Ex 1: 4 pts ; Ex 2: 6,5 pts ; Ex 3: 3 pts ; Ex 4: 4,5 pts ; Ex 5: 2 pts

Boy Cazage

Corrigé du partiel du module "Algèbre 3"

du 04/12/2013

Exercice 30 (1): voir cours (4 pt)

Exercice 30 (2)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow P_A(\lambda) = -(\lambda-2)(\lambda-4)^2 \rightarrow \lambda_1 = 2 \text{ (1)} \quad \lambda_2 = 4 \text{ (2)} \quad (1 \text{ pt})$$

$$E_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / (A-4I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tous les mineurs d'ordre 2 sont nuls \Rightarrow prend $\delta = -1 \neq 0$, le système est compatible car le second membre est nul, on pose $y = a$ et $z = b$

$$\Rightarrow x = -b \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_4 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{v_2, v_3\} \text{ est une famille génératrice de } E_4, \text{ elle est libre car } \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \text{ (TB)} \text{ pm conséquent } \{v_2, v_3\} \text{ est une base de } E_4 \quad (1, 5 \text{ pt})$$

$\Rightarrow \dim E_4 = 2 = \text{mult}(4) \Rightarrow A$ est diagonalisable.

$$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / (A-2I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0, \text{ le système.}$$

est compatible car le second membre est nul on pose $z = a \Rightarrow \begin{cases} x = a \\ 2x + 2y = -2a \end{cases}$

$$\Rightarrow x = a \text{ et } y = -2a \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1 \text{ pt})$$

Concluons $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et on a $A' = P^{-1}AP$ pm conséquent.

$$A^n = P A'^n P^{-1} = P \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} P^{-1} \quad (1 \text{ pt})$$

Déterminons P^{-1} $\det P = 2; {}^t P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ cof}({}^t P) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1 \text{ pt})$

$$\Rightarrow A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2^n + 4^n & 0 & 2^n - 4^n \\ 2(4^n - 2^n) & 2 \cdot 4^n & 2(4^n - 2^n) \\ 2^n - 4^n & 0 & 2^n + 4^n \end{pmatrix} \quad (1 \text{ pt})$$

Exercice 31 (3). On remarque que $P_A(x) = (x-1)^4$, ainsi A a une unique valeur propre 1, si elle était diagonalisable il existe P inversible $I = P^{-1}AP \Rightarrow A = PIP^{-1} = I$ impossible car $A \neq I$, pm conséquent A n'est pas diagonalisable (3 pt).

Exercice 9° (4)

$$1/ P_A(x) = \begin{vmatrix} 1+m-x & 1+m & 1 \\ -m & -m-x & -1 \\ m & m-1 & -x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+m-x & 1+m & 1 \\ -m & -m-x & -1 \\ 0 & -x-1 & -x-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+m-x & m & 1 \\ -m & 1-m-x & -1 \\ 0 & 0 & -x-1 \end{vmatrix}$$

$$= (-x-1) [(1-x)^2 - m^2 + m^2] = \underline{\underline{-(x+1)(x-1)^2}} \quad (0,1 \text{ pt})$$

Ainsi les valeurs propres de A sont -1 de multiplicité 1 et 1 de multiplicité 2.

2°/ A est diagonalisable si $\dim E_{-1} = 2$.

$$E_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / (A-I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow \begin{pmatrix} m & 1+m & 1 \\ -m & -m-1 & -1 \\ m & m-1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (0,1 \text{ pt})$$

Puis que $\dim E_{-1} = 2$ il faut avant tout un mineur d'ordre 1 non nul. et tous les mineurs d'ordre 2 nuls, on remarque que quelques uns sont nuls quelque soit m mais d'autres non :

$$\begin{vmatrix} m & 1+m \\ m & m-1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} m & 1 \\ m & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -m-1 & -1 \\ m-1 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -m & -1 \\ m & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -m & -m-1 \\ m & m-1 \end{vmatrix} \quad (1,5 \text{ pt})$$

Tous ces mineurs sont nuls si $m=0$ par conséquent A est diagonalisable si $m=0$ (0,1 pt)

Exercice 9° (5)

$P_A(x) = \begin{vmatrix} a-x & c \\ c & d-x \end{vmatrix} = (a-x)(d-x) - c^2 = x^2 - (a+d)x + ad - c^2$, déterminons ses racines, calculons le discriminant $\Delta = (a+d)^2 - 4(ad - c^2) = a^2 + d^2 - 2ad + 4c^2 = (a-d)^2 + 4c^2 \geq 0$.
 On a $\Delta = 0 \Leftrightarrow a-d=0$ et $c=0$ mais si $c=0$ A est déjà diagonale, si non $\Delta > 0$ et le polynôme caractéristique admet 2 racines réelles distinctes, ce qui prouve que la matrice est toujours diagonalisable dans \mathbb{R} (0,2 pt)