Série de TD 02-Equations différentielles

Exercice 01 :

1) Trouver les équations différentielles du 1er ordre qui ont pour solutions, les fonctions suivantes :
   $f(x) = Ce^{-x}$, $C \in \mathbb{R}$, $g(x) = K(x^2+1)$, $K \in \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$
2) Trouver une équation différentielle du 2ème ordre qui a : $y(x) = 3\cos x$, comme solution.
3) Résoudre les équations différentielles à variables séparées suivantes :
   (a) $yy' = x$ **(b)** $x(\ln x)y' = (3\ln x + 1)y,\ y(e) = 1$
4) Résoudre les équations différentielles homogènes en x et y, suivantes :

(a) $xy' - y = x(1 - e^{\frac{-y}{x}})$ **(b)** $x^2y' = x^2 + y^2 - xy$

Exercice 02 :

Intégrer les équations différentielles linéaires du premier ordre suivantes :

(1) $y' + 2y = 2x + 1$ (Solution particulière évidente) **(2)** $(\mathrm{ch}x)y' + (\mathrm{sh}x)y = \frac{1}{1+x^2},\ y(0) = 1$

(3) $y' - \frac{1}{x}y = \frac{x}{1+x^2}$ **(4)** $y' - \left(2x - \frac{1}{x}\right)y = 1$

Exercice 03 :

Considérons l'équation différentielle : $y' = 2y(y-3)$ (E)

1) Résoudre (E) comme : **(i)** E.D à variables séparées. **(ii)** E.D de Bernoulli.
2) Déterminer la solution de (E) qui vérifie : $y(0) = 1$

Exercice 04 :

Considérons l'équation différentielle (E) $x^2y' + xy = ay^2 + bx^2$, où a et b des réels.

1) Déterminer les constantes a et b pour que : $y_0(x) = x$ soit une solution particulière de (E) .
2) Résoudre (E) dans les cas suivants :
3) **(i)** $a = b = 0$ **(ii)** $a = 0$ et $b = 1$ **(iii)** $a = 1$ et $b = 0$ **(iv)** $a = b = 1$

Exercice 05 :

1) Résoudre les E.D linéaires du 2ème ordre sans second membre suivantes :

$$-y'' + 5y' - 4y = 0, \qquad y'' - 6y' + 9y = 0, \qquad y'' + 2y' + 2y = 0$$

2) Résoudre les E.D linéaires du 2ème ordre avec second membre suivantes :

(a) $y'' + \pi^2 y = \frac{1}{\sin \pi x}$ **(b)** $y'' + 2y' + y = \cos x$ (Solution particulière)
(c) $y'' - 5y + 6y = x^2 + e^{3x}$ **(d)** $my'' + (m+1)y' + y = 2e^{-x}, m \in \mathbb{R}^*, y(0) = 1, y'(0) = 0$

Exercice 06 **(FACULTATIF)** Considérons l'E.D : $(x^2+1)y' + 2xy = \frac{1}{x^2+1}$ (E)

1) Vérifier que : $y_p(x) = \frac{\arctan x}{x^2+1}$ est une solution particulière de (E)
2) Retrouver cette solution particulière en utilisant la méthode de la variation de la constante.
3) En déduire la solution de l'E.D : $(x^2+1)^2 Z'' = 1 - 2x(x^2+1)Z'$

Exercice 07 **(FACULTATIF)**

On se propose d'intégrer sur $]0,+\infty[$ l'E.D de Riccati suivante : $y' - \frac{1}{t}y - y^2 = -9t^2$ (E)

4) Déterminer la constante a $(a > 0)$ pour que $y_0(t) = at$ soit une solution de (E).
5) Montrer que le changement de fonction $z = y - y_0$, transforme l'E.D (E) à une E.D de Bernoulli

$$z' - \left(\frac{1}{t} + 6t\right)z - z^2 = 0 \qquad (E_1)$$

Montrer que le changement de fonction : $X = \frac{1}{z}$, transforme l'E.D (E_1) à une E.D linéaire du 1er ordre :

$$X' + \left(\frac{1}{t} + 6t\right)X + 1 = 0 \qquad (E_2)$$

6) Résoudre (E_2) et en déduire la solution générale de (E)

Exercices supplémentaires

Exercice 01 : Résoudre les équations différentielles suivantes :

(1) $yy' + ty^2 + t = 0,\ y(0) = 1$ **(2)** $y' = 2x(e^{-y} + 1)$ **(3)** $xy^2y' = x^3 + y^3$

(4) $xy' + y = \arctan x$ **(5)** $xy' - \frac{1}{x+1}y = \frac{x}{x+1}$

Exercice 02 Considérons l'équation différentielle : $x^2y' + xy = y^2 + x^2$ (E)

1) Vérifier que $y_0(x) = x$ est une solution particulière de (E)
2) Résoudre (E) comme : (i) E.D homogène en x et y. (ii) E.D de Riccati.

Exercice 03 Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) Equation de Bernoulli : $xy' + y = (\ln x)y^2$
2) Equation de Riccati : $x^3y' + x^2y = -y^2 - 2x^4$, sachant que $y_0(x) = -2x^2$ est une solution particulière.

Exercice 04 : Intégrer les équations différentielles suivantes :

(1) $2y'' + (1 - 2\sqrt{2})y' - 2\sqrt{2} = 1$ **(2)** $y'' + 2y' + 5y = 4e^{-x}\cos 2x$

(3) $4y'' + 4y' + y = e^{-x}, y(0) = 1, y'(0) = 0$ **(4)** $y'' + y' - y = e^x + \sin x$

Exercice 05 Considérons les équations différentielles suivantes :

(E_1) $xy' - (2x+1)y = y^2 + x^2 + 2$ (E_2) $xu' - u = u^2$ (E_3) $-xz' + z = 1$

1) Déterminer les constantes a et b pour que $y_0(x) = ax + b$ soit une solution particulière de (E_1).
2) Résoudre (E_3) et (E_2) et en déduire la solution générale de (E_1).