Université Abou Bekr Belkaid **A.U 2018-2019**
Faculté des Sciences
Tronc Commun SM(Maths2)

TD N°3 Applications Linéaires et Matrices

Exercice 1: On considère l'application

$$T : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+2y-z, y+z, x+y-2z) \end{array}$$

1. Montrer que T est une application linéaire.
2. Trouver une base et la dimension de $Im(T)$.
3. Trouver une base et la dimension de $Ker(T)$.

Exercice 2: On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y, y+z)) \end{array}$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Donner une base de $\ker(f)$. En déduire $rg(f)$.

Exercice 3: Trouver la matrice associée à chaque application linéaire relativement à la base canonique ensuite relativement à la base $\{f_1 = (1,3), f_2 = (2,5)\}$

1. $f(x,y) = (2y, 3x-y)$.
2. $g(x,y) = (3x-4y, x+5y)$.

Exercice 4: Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une application linéaire, $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit

$$A = M_f(B) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer l'image d'un vecteur $u = (x,y,z)$ de $\mathbb{R}^3$ par f.
2. Déterminer le rang de A.
3. En déduire la dimension du noyau de f.

Exercice 5: Soit A une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et B une matrice de $\mathcal{M}_{(2,3)}(\mathbb{R})$ définies par:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculer les matrices $A+B, AB, BA, A^2, B^2, {}^tBA$ et $A+2I_2$, lorsque c'est possible.

Exercice 6 Soit les applications linéaires

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x-z, 3x+y+2z) \end{array}, \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, -y, 2x-y) \end{array}$$

1. Déterminer la matrice A de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$. Puis la matrice B de g dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

2. Calculer les matrices $A.B,\ B.A,\ (AB)^2$.

3. Montrer que $A.B$ est inversible et déduire $(A.B)^{-1}$.

4. Déterminer et sans calcul $(fog)^2$.

Exercice 7 Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(a) Montrer que M est inversible.

(b) Calculer la comatrice de M.

(c) En déduire l'inverse de M.

Exercice 8 Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Soit $u_1 = e_1 - e_2 + e_3,\ u_2 = 2e_1 - e_2 + e_3$ et $u_3 = 2e_1 - 2e_2 + e_3$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$

(a) Montrer que $B' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Déterminer la matrice de passage de B à B'. Calculer P^{-1}.

(c) Déterminer la matrice R de f dans la base B'.

- Calculer $P^{-1}.A.P$ en fonction de R.
- Calculer R^4.
- En déduire les valeurs de A^{4n}.