Université Abou Bekr Belkaid **A.U 2018-2019**
Faculté des Sciences
Tronc Commun SM(Maths2)

TD N°2 EspacesVectoriels

Exercice 1: Soit $E = \{(x, y);\ x, y \in \mathbb{R}\}$, munit de l'addition et la multiplication scalaires définies respectivement par:

$$\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2;\ [(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \text{ et } \forall \alpha \in \mathbb{R};\ \alpha(x, y) = (\alpha x, y).$$

Montrer que E n'est pas un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2:

1. Montrer que $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x + y + z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2. Montrer que $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3:

1. Soit $m \in \mathbb{R}$ et $v = (1, -2, m)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Pour quelle valeur de m, le vecteur v est-il une combinaison linéaire des vecteurs $v_1 = (3, 0, 2)$ et $\mathrm{v}_2 = (2, -1, -5)$?

2. Soit $u = (x, y, z)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$. A quelles conditions sur x, y et z, le vecteur u appartient à l'espace engendré par $u_1 = (2, 1, 0),\ u_2 = (1, -1, 2)$ et $u_3 = (0, 3, -4)$.

Exercice 4: Dire si les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants sont linéairement indépendants ou linéairement dépendants.

1. $(1, -2, 1), (2, 1, -1), (7, -4, 1)$.

2. $(1, -3, 7), (2, 0, -6), (3, -1, -1), (2, 4, -5)$.

3. $(1, 2, -3), (1, -3, 2), (2, -1, 5)$.

4. $(2, -3, 7), (0, 0, 0), (3, -1, -4)$.

Exercice 5: Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x + y - z = 0 \text{ et } x - y - z = 0\}$,
$\mathrm{F} = \{(\mathrm{x,y,z}) \in \mathbb{R}^3;\ x + y - 2z = 0\}$ deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$, et $u_1 = (1, 0, 1)$,

$\mathrm{u}_2 = (1, 1, 1), u_3 = (0, 2, 1)$.

1. Montrer que E, F sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

2. Déterminer une famille génératrice de E et montrer que cette famille est une base de E.

3. Montrer que $\{u_2, u_3\}$ est une base de F.
4. Montrer que $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.
5. A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^3$?
6. Soit $u = (x, y, z)$ écrit dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Exprimer u dans la base $\{u_1, u_2, u_3\}$.

Exercice 6: Soit $E_1 = \{(a, b, c, d);\ b - 2c + d = 0\}$,

$\mathrm{E}_2 = \{(a, b, c, d);\ a = d, b = 2c\}$

1. Montrer que E_1, E_2 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$
2. Trouver une base et la dimension de E_1 et E_2.
3. Montrer que $R^3 = E_1 \oplus E_2$.

Exercice 7(supp) Soit $E = Vect(u_1, u_2, u_3, u_4)$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ où $u_1 = (2, -1, -1), u_2 = (-1, 2, 3), u_3 = (1, 4, 7), u_4 = (1, 1, 2)$.

1. $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?
2. Montrer que $\{u_1, u_2\}$ est une base de E.
3. Soit $u = (x, y, z)$ un vecteur de E. Déterminer une relation entre x, y, et z.
4. Trouver un supplémentaire de E dans $\mathbb{R}^3$.