Université de Tlemcen Dimanche 15 Septembre 2019

Faculté des Sciences **Module :** Math 2- Tronc commun Sciences et Technologies

Département des Mathématiques **Durée :** 1 h-30mns

Examen de rattrapage

« L'usage de la calculatrice est strictement interdit »

Exercice 01 : (06 pts)

1. Décomposer, en une somme de fractions simples, la fraction rationnelle suivante :
$$\frac{x^3+2x-2}{x^2(x^2+2)}$$
2. Calculer l'intégrale suivante :
$$\int_1^2 \frac{x^3+2x-2}{x^2(x^2+2)}\,dx$$

Exercice 02 : (07 pts)

On considère l'équation différentielle : $y'' - 4y' + 4y = (2x-4)e^x \qquad (\boldsymbol{E})$

1. Résoudre l'équation sans second membre associée à (E)
2. On désigne par : $y_p(x) = (ax+b)e^x$, une solution particulière de l'équation (E), déterminer les valeurs de $a\ et\ b$.
3. En déduire la solution générale de l'équation (E).

Exercice 03 : (07 pts)

Soit le système d'équations linéaires suivant :

$$(\boldsymbol{s})\begin{cases} -x+2y-z=0 \\ -4x+5y-3z=-2 \\ -2x+2y-z=-1 \end{cases}$$

1. Ecrire la système (S) sous la forme matricielle $A\,X = B$.
2. Calculer le déterminant de la matrice A. En déduire que A est inversible, puis calculer son inverse A^{-1}
3. Résoudre le système (S).

Corrigé

Exercice 01 : (06 pts)

1. Décomposition en éléments simples :

$$P(x) = \frac{x^3+2x-2}{x^2(x^2+2)} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \frac{\gamma x+\mu}{x^2+2} \ (\mathbf{0.5\ pt})$$

$$\beta = \lim_{x\to 0} x^2 P(x) = -1$$

On a : $\lim_{x\to+\infty} xP(x) = 1 = \alpha+\gamma$

En plus $P(1) = \frac{1}{3} = \alpha+\beta+\frac{\gamma+\mu}{3}$ et $P(-1) = -\frac{5}{3} = -\alpha+\beta+\frac{-\gamma+\mu}{3}$

D'où : $\alpha = 1, \beta = -1, \gamma = 0\ et\ \mu = 1(\mathbf{0.5\ pt \times 3 = 1.5\ pt})$

Et

$$\frac{x^3+2x-2}{x^2(x^2+2)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2+2}$$

2. Calcul de l'intégrale :

$$\int_1^2 \frac{x^3+2x-2}{x^2(x^2+2)}\,dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2+2}\right) dx$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx + \int_1^2 \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx + \int_1^2 \frac{1}{x^2+2}\,dx\ (\mathbf{0.5\ pt})$$

$$= [\ln x]_1^2 + \left[\frac{1}{x}\right]_1^2 + \int_1^2 \frac{dx}{2\left(\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right)}\ (\mathbf{0.5\ pt}) \times \mathbf{3}$$

En effectuant le changement de variable suivant :

$$\left\langle \begin{array}{c} u = \frac{x}{\sqrt{2}} \\ du = \frac{dx}{\sqrt{2}} \end{array} \right\rangle (\mathbf{0.5\ pt})$$

On obtient : $\int_1^2 \frac{dx}{2\left(\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}} \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}[Arctg\ u]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}} (\mathbf{0.5\ pt})$

D'où :

$$\int_1^2 \frac{x^3+2x-2}{x^2(x^2+2)}\,dx = \ln 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Arctg(\sqrt{2}) - Arctg\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) (\mathbf{01\ pt})$$

Exercice 02 : (07 pts) On considère l'équation différentielle : $y'' - 4y' + 4y = (2x-4)e^x \qquad (\boldsymbol{E})$

1) L'équation sans second membre associée à (**E**) est :

$$y'' - 4y' + 4y = 0\ (\mathbf{0.5\ pt})$$

L'équation caractéristique $r^2 - 4r + 4 = 0$, admet une solution double $r = 2$ **(01 pt)**

D'où la solution de l'ESSM est $y_0(x) = (c_1x + c_2)e^{2x}, avec\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ **(01 pt)**

2) On a

$$y_p(x) = (ax+b)e^x$$
$$y_p'^{(x)} = (ax+a+b)e^x(\mathbf{0.5\ pt})$$
$$y_p''^{(x)} = (ax+2a+b)e^x(\mathbf{0.5\ pt})$$

En remplaçant dans l'équation (**E**), on obtient

$$(ax+2a+b)e^x - 4 = (ax+a+b)e^x + 4 = (ax+b)e^x = (2x-4)e^x(\mathbf{0.5\ pt})$$

Ou encore :

$$ax - 2a - 7b = 2x - 4(\mathbf{0.5\ pt})$$

Par identification : a=2 et b=0($\mathbf{0.5\ pt}$)

Donc $y_p(x) = 2xe^x(\mathbf{0.5\ pt})$

3) La solution générale de (**E**) $y(x) = y_0(x) + y_p(x)(\mathbf{01pt}) = (c_1x + c_2)e^{2x} + 2xe^x(\mathbf{0.5\ pt})$

Exercice 03 : (07 pts) Soit le système d'équations linéaires suivant :

$$(\boldsymbol{s})\begin{cases} -x+2y-z=0 \\ -4x+5y-3z=-2 \\ -2x+2y-z=-1 \end{cases}$$

1.

$$(\boldsymbol{S}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -4 & 5 & -3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Donc $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -4 & 5 & -3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\ et\ B = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ **(0.75pt)**

2. Calcul du déterminant de A

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -4 & 5 & -3 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -4 & -3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$$
$$\det(A) = 1\ (\mathbf{01\ pt})$$

La matrice A est inversible, puisque son déterminant n'est pas nul : $\det(A) \neq 0$. **(01 pt)**

Calcul de l'inverse A^{-1} :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\ {}^t com(A)\ (\mathbf{0.25\ pt})$$

$$com(A) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -4 & -3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$com(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\ (\mathbf{0.25pt \times 9 = 2.25pt})$$

Donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ $(\mathbf{0.25\ pt})$

3. Résolution du système :

$$(\boldsymbol{S}) \Leftrightarrow AX = B$$

Ce qui implique :

$$X = A^{-1}B\ (\mathbf{0.5\ pt}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} (\mathbf{0.5\ pt})$$

D'où :

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\ ou\ encore\ x = y = z = 1(\mathbf{0.5\ pt})$$