Université de Tlemcen Dimanche 07 Juillet 2019

Faculté des Sciences **Module :** Math 2- Tronc commun Sciences et Technologies

Département des Mathématiques **Durée :** 1 h-30mns

Examen final

« L'usage de la calculatrice est strictement interdit »

Questions de cours : (06 pts) Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le déterminant de A.
2. La matrice A est-elle inversible ? Dans le cas affirmatif, déterminer son inverse A^{-1}
3. On considère le système d'équations linéaires suivant :

$$(S)\begin{cases} x + z = 4 \\ x + y = 3 \\ y + z = 5 \end{cases}$$

En utilisant la méthode matricielle, résoudre ce système.

Exercice 01 : (05 pts)

1. Vérifier que : $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$
2. Décomposer, en une somme de fractions simples, la fraction rationnelle suivante :

$$\frac{x^2 + 2}{x^3 + 1}$$

3. Calculer l'intégrale définie :

$$\int_0^1 \frac{x^2 + 2}{x^3 + 1} dx$$

Exercice 02 : (05 pts)

On considère l'équation différentielle : $2y'' + y' - y = xe^x \quad (\boldsymbol{E})$

1. Résoudre l'équation sans second membre associée à (E) :

$$2y'' + y' - y = 0 \quad (\boldsymbol{E_0})$$

2. On désigne par : $y_p(x) = (ax + b)e^x$, une solution particulière de l'équation (E), déterminer les valeurs de a et b.
3. En déduire la solution générale de l'équation (E).

Exercice 03 : (04 pts)

1. Donner le développement limité de la fonction $x \longmapsto \ln(1 + x)$ à l'ordre 2, au voisinage de 0.
2. En déduire la valeur de la limite : $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+2x) - 2x}{x^2}$

Bon courage

<u>Corrigé</u>

Questions de cours : (06 pts) Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calcul du déterminant de A :
   $Det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = +1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2\ (\mathbf{01\ pt})$
2. La matrice A est inversible puisque son déterminant n'est pas nul **(0.5 pt)**.
   Calcul de l'inverse de A par la méthode de Gauss :

$$\begin{array}{c} \boldsymbol{L_1} \\ \boldsymbol{L_2} \\ \boldsymbol{L_3} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \\ \boldsymbol{L_2 - L_1} \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) (\mathbf{0.5\ pt})$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ \boldsymbol{L_3 - L_2} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) (\mathbf{0.5\ pt})$$

$$\begin{array}{c} \boldsymbol{L_1 - \frac{1}{2}L_3} \\ \boldsymbol{L_1 + \frac{1}{2}L_3} \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & & & \\ & & & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) (\mathbf{0.5\ pt\ \times 2})$$

$$\begin{array}{c} \\ \boldsymbol{\frac{1}{2}L_3} \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) (\mathbf{0.25\ pt})$$

D'où :

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} (\mathbf{0.25\ pt})$$

2eme réponse possible : calcul de l'inverse par la méthode des cofacteurs :

$${}^{t}A\ (\mathbf{0.25\ pt}), b_{ij} = \frac{1}{\det(A)}\ (-1)^{i+j}\Delta_{ij}(\mathbf{0.25\ pt \times 9})$$

3. La forme matricielle du système :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} autrement\ noté\ AX = B\ (\mathbf{0.5\ pt})$$

Puisque la matrice A est inversible, le système admet une solution unique :

$$X = A^{-1}B\ (\mathbf{0.5\ pt})$$

Donc :

$$X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\ (\mathbf{0.5\ pt})$$

i.e $x = 1, y = 2\ et\ z = 3\ (\mathbf{0.5\ pt})$

2ème réponse possible :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

$$\boldsymbol{L_2 - L_1}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right)\ (\mathbf{0.5\ pt})$$

$$\boldsymbol{L_3 - L_2}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right)\ (\mathbf{0.5\ pt})$$

$$D'où, on\ obtient: \begin{cases} x + z = 4 \\ y - z = -1 \\ 2z = 6 \end{cases}\ (\mathbf{0.5\ pt})$$

Ce qui implique $x = 1, y = 2\ et\ z = 3\ (\mathbf{0.5\ pt})$

Remarque : on accepte aussi la méthode de Cramer

Exercice 01 : (05 pts)

1. Vérification de l'identité remarquable **(0.25 pt).**
2. La décomposition en éléments simple :

$$\frac{x^2+2}{x^3+1} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}\ (\mathbf{0.5\ pt})$$

$$a = \lim_{x\to -1}(x+1)\frac{x^2+2}{x^3+1} = 1\ (\mathbf{0.25\ pt})$$

$$\lim_{x\to +\infty} x\frac{x^2+2}{x^3+1} = a + b \Leftrightarrow 1 = a + b\ càd\ b = 0(\mathbf{0.5\ pt})$$

$$pour\ x = 0\ on\ obtient: 2 = a + c, ou\ encore\ c = 1(\mathbf{0.5\ pt})$$

D'où :

$$\frac{x^2+2}{x^3+1} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2-x+1}$$

3. Calcul de l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{x^2+2}{x^3+1}dx = \int_0^1 \frac{1}{x+1}dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2-x+1}dx$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx = [\ln(x+1)]_0^1 = \ln 2 \ \ (\mathbf{0.5\ pt})$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2-x+1}dx = \int_0^1 \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx\ (\mathbf{0.5\ pt}) = \frac{4}{3}\int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)^2+1}dx$$

$$= \left\langle \begin{array}{c} u = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right) \\ du = \frac{2}{\sqrt{3}}dx \end{array} \right\rangle\ (\mathbf{0.5\ pt})$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{u^2+1}du\ \ (\mathbf{0.5\ pt})$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}[Arctg(u)]_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\ (\mathbf{0.5\ pt})$$

$$= \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\ (\mathbf{0.5\ pt})$$

$$D'où: \int_0^1 \frac{x^2+2}{x^3+1}dx = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} + \ln 2$$

Exercice 02 : (05 pts)

1. Soit l'ESSM :

$$2y'' + y' - y = 0 \qquad (\boldsymbol{E_0})$$

L'équation caractéristique associée : $2r^2 + r - 1 = 0$ $(\mathbf{0.5pt})$, admet deux solutions réelles :

$r_1 = -1\ et\ r_2 = \frac{1}{2}$ $(\mathbf{0.5\ pt})$

Donc la solution de $(\boldsymbol{E_0})$ est : $y_0(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{\frac{1}{2}x}, tel\ que\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ $(\mathbf{1\ pt})$.

2. On a :

$$y_p(x) = (ax+b)e^x$$
$$y_p'^{(x)} = (ax+b+a)e^x(\mathbf{0.25\ pt})$$
$$y_p''^{(x)} = (ax+b+2a)e^x(\mathbf{0.25\ pt})$$

En remplaçant dans l'équation **(E)** , on obtient :

$$2(ax+b+2a)e^x + (ax+b+a)e^x - (ax+b)e^x = xe^x\ (\mathbf{0.5pt})$$

Par identification,

$$\begin{cases} 2a = 1\ (\mathbf{0.25pt}) \\ 5a + 2b = 0\ (\mathbf{0.25\ pt}) \end{cases}$$

D'où : $a = \frac{1}{2}\ et\ b = -\frac{5}{4}\ (\mathbf{0.5pt})et\ y_p(x) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{5}{4}\right)e^x(\mathbf{0.5\ pt})$

3. La solution générale de l'équation (E)est :

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x)$$

$$y(x) = \frac{1}{4}(2x-5) + c_1e^{-x} + c_2e^{\frac{1}{2}x}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}\ (\mathbf{0.5\ pt})$$

Exercice 03 : (04pts)

1. Le DL de la fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$ à l'ordre 2, au voisinage de 0 :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\ (\mathbf{1.5pt})$$

2. D'après la première question :

$$\ln(1+2x) = 2x - \frac{(2x)^2}{2} + o(x^2)\ (\mathbf{1\ pt})$$

D'où :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)-2x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2x - \frac{(2x)^2}{2} - 2x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-2x^2}{x^2} = -2\ (\mathbf{1.5\ pt})$$