Université Aboubekr Belkaid-Tlemcen

1ère Année Sciences et Technologies

Module : Mathématiques 1

Série de TD 03-Fonctions réelles

Exercice 01 : Déterminer le domaine de définition puis étudier la parité de chacune des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \left|\frac{e^x+1}{e^x-1}\right| \quad f_2(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

Exercice 02 : Les fonctions suivantes sont-elles minorées ? majorées ? dans le cas affirmative déterminer un majorant et/ou un minorant :

$$1)f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -2\sin(x^2+2x-1) \end{array} \qquad 2)g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{1+x^2} \end{array}$$

$$3)h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2}{3-\cos x} \end{array} \qquad 4)k: \begin{array}{ccc}]0,5] & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x}-\dfrac{1}{1+x} \end{array}$$

Exercice03 : Soit $f(x) = x - E(x) = x - [x]$

Tracer le graphe de f, puis montrer qu'elle est périodique de période T=1.

Exercice 04 : Calculer les limites suivantes, lorsqu'elles existent :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x^2-3x+1}}{x}, \quad \lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{2x^2+4x-6}, \quad \lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^n-1}$$

$$\lim_{x\to\pi}\frac{(\sin x)^2}{1+\cos x}, \qquad \lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}, \qquad \lim_{x\to0}x^2\frac{\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{x+4}-2}, \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}{x^2}, \quad \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x+e^x}, \qquad \lim_{x\to0}x^{-\frac{7}{2}}\quad e^{-\frac{1}{x^2}}, \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1+x^2e^x}$$

Exercice 05 : Etudier la continuité des fonctions suivantes :

$$1)f(x) = x-[x] \qquad 2)g(x) = x+\frac{\sqrt{x^2}}{x}\ si\ x\neq0\ et\ g(0)=0$$

$$3)h(x) = \sin x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad 4)k(x) = \frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}$$

Peut-on prolonger, par continuité, les fonctions $h\ et\ k$ sur $\mathbb{R}$?

Exercice 06 : Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout entier naturel n, par :

$$f_n(x) = \ln(1 + x^n) + x - 1$$

1. Montrer qu'il existe au moins un réel $c_n \in]0,1[\ tel\ que\ f_n(c_n) = 0$.
2. Montrer que f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. En déduire que c_n est unique.

Exercice 07 : Soit a et b deux réels. On définit la fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}\ si\ 0 \leq x \leq 1 \\ a(x^2 - 1) + b\ \ si\ x > 1 \end{cases}$$

Déterminer a et b pour que f soit dérivable sur $\mathbb{R}^+$.Déterminer a et b pour que f soit de classe $C^1(\mathbb{R}^+)$

Exercice 08 : Etudier la dérivabilité en 0 des fonctions suivantes :

1) $f(x) = x\sin\frac{1}{x}\ si\ x \neq 0\ et\ f(0) = 0$ 2) $g(x) = x^2\sin\frac{1}{x}\ si\ x \neq 0\ et\ g(0) = 0$

2) $h(x) = \cos\sqrt{|x|}$ 4) $k(x) = \ln(1 + |x|)$

Exercice 09 : Calculer les dérivées des fonctions suivantes, en précisant le domaine de dérivabilité dans chaque cas :

$$f_1 : x \longmapsto \ln(x^2 - 1)\ ; \qquad f_2 : x \longmapsto \frac{\sin x}{(2 + \cos x)^n}\ ; \qquad f_3 : x \longmapsto \left(tg\ \left(\frac{x}{2}\right)\right)^2\ ;$$

$$f_4 : x \longmapsto \ln((\sin x)^2)\ ; \quad f_5 : x \longmapsto Arctg\left(\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)\ ; \qquad f_6 : x \longmapsto x^{x+1};$$

Exercice 10 : On considère l'application $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x}\left(\sqrt{1 + x^2} - \sqrt{1 - x^2}\right)\ si\ x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $[-1,1]$, dérivable sur $]-1,1[$ et déterminer sa dérivée.
2. Montrer que l'application dérivée $f' :]-1,1[\to \mathbb{R}$ est continue sur $]-1,1[$. Résoudre l'équation $f'(x) = 0\ dans\ ]-1,1[$.
3. Dresser le tableau de variation de f et tracer son graphe. En déduire que f est injective.
4. On désigne par $\tilde{f}$ la bijection $\tilde{f} : [-1,1] \to f([-1,1])$ définie par $\tilde{f}(x) = f(x)$ pour tout $x \in [-1,1]$, et on désigne par $\tilde{f}^{-1}$ sa bijection réciproque. Justifier l'existence et déterminer $\left(\tilde{f}^{-1}\right)'(0)$.

Exercice 11 : En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que

$$\forall x > 0, \frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}$$

Calculer $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}(\ln(x+1) - \ln(x))\ \ et\ \ \lim_{x\to+\infty} x(\ln(x+1) - \ln(x))$

En déduire que : $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$

Exercice 12 :

- Montrer que l'on a : $x\cos x - \sin x\ < 0\ sur\ ]0,\pi[$
- Etudier le sens des variations de la fonction $g(x) = \frac{\sin x}{x}\ sur]0,\pi]$
- Montrer que $\forall x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[, on\ a\ \frac{2x}{\pi} < \sin x < x$

Exercice 13 :

- Etudier et tracer les graphes des fonctions $x \longmapsto Arcsin(\sin x)\ \ et\ x \longmapsto Arcos(\cos x)$
- Montrer que $\forall x \in [-1,1], Arcsin(x) + Arcos(x) = \frac{\pi}{2}$
- Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*, Arctg(x) + Arctg\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} sgn(x)$

Exercice 14 :

- Calculer les expressions :

$$\mathrm{A} = \sin(arcos\ \frac{\sqrt{3}}{2}) + \cos(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}), \qquad \mathrm{B} = \arcsin(\sin\frac{5\pi}{6}) + \arccos(\cos\frac{\pi}{6})$$

- Simplifier les expressions :

$$\sin(2\arcsin x), \qquad \sin(2\arccos x), \qquad (\boldsymbol{supp})\cos(2\arcsin x),$$
$$(\mathbf{supp})\cos(2\arccos x), \quad (\mathbf{supp})\sin(2arctg\ x), \quad (\boldsymbol{supp})\cos(2arctg\ x)$$

Exercices supplémentaires :

Exercice 01 : Discuter la parité des fonctions $fg\ et\ f\circ g$ selon la parité de f et de g.

Exercice 02 : Soit $f(x) = |x-3| + |2x+6|$

Déterminer les restrictions de f aux intervalles : $]-\infty,-3], [-3,3]\ et[3,+\infty[$.En déduire le sens de variation de la fonction .

Exercice 03 : On considère la fonction continue sur $[-3,2]$ dont le tableau de variation est le suivant :

x	-3		-2		1		2
f			5				2
		↗		↘		↗	
	-2				0		

Déterminer les images, par f, des intervalles $[-2,1], [-2,2], [-3,1]$. Déterminer le nombre des solutions des équations $f(x) = 0 \; et \; f(x) = 1$.

Exercice 04 : Soient $f \; et \; g$ deux fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$, et qui sont continues en un point a. Et soit l'application $\min(f,g)(resp. \max(f,g))$ qui a tout réel x associe le minimum entre $f(x) et \; g(x)$ (resp. max($f(x), g(x)$)). Montrer que les fonctions $\min(f,g) \; et \max(f,g)$ sont continues en a.

Indication : $min(x,y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|) et \max(x,y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$

Exercice 05 : Soit $P(x) = 6x^3 - 8x^2 - 3x + 4$.

Calculer $P(-1), P(0), P(1) et \; P(2)$.

Montrer que ce polynôme possède au moins trois racines .

Exercice 06 : Peut-on appliquer le théorème des accroissements finis sur [0,2] aux fonctions

$$f(x) = \begin{cases} x & si \; 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & si \; 1 < x \leq 2 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x^2 - 3) & si \; x \leq 1 \\ -\frac{1}{x} & si \; 1 < x \end{cases}$$

Exercice 07 :

Montrer que toute fonction périodique non constante n'admet pas de limite en $(+\infty)$

Exercice 08 : Soit $f(x) = xlnx - x, tel \; que \; x > 1$. Montrer que $f:]1, +\infty[\to]-1, +\infty[$ est une bijection. Calculer $f^{-1}(0) et \; (f^{-1})'(0)$

Exercice 09 : Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues en 0 et vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(3x) = f(x)$$

Exercice 10 :

- Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, Arctg(x) > \frac{x}{1+x^2}$
- Résoudre l'équation d'inconnue réelle x : $Arcos(x) = Arcsin\left(\frac{1}{3}\right) + Arcos(\frac{1}{4})$