Université Aboubekr Belkaid-Tlemcen

1ère Année Sciences et Technologies

Module : Mathématiques 1

Série de TD 02-Applications et relations

Exercice 01 : Les fonctions $f_1(x) = |x|, f_2(x) = \sqrt{x^3 - 1}\ et\ f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ sont-elles des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

Exercice 02 : Soit

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 + 1 \end{array}$$

Déterminer $f([-1,4]), f(]-\infty, 0]), f^{-1}(\{4\}), f^{-1}([-1,4]), f^{-1}(]-\infty, 0])$.

1. Quelle est l'image directe, par la fonction sinus, de $\mathbb{R}$? de $[0,2\pi]?\ de\ \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$?
2. Déterminer l'image réciproque, par la fonction cosinus, de $[-1,1]?\ de\ [0,1]$?de $\{0,1\}$?

Exercice 03 : Soient les applications

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^* \\ x \mapsto \dfrac{1}{x} \end{array} \quad et \quad g: \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{x-1}{x+1} \end{array}$$

Montrer que $g \circ f = -g\ sur \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 04 : Les applications suivantes sont-elles injectives ?surjectives ? bijectives ?

$$1) f_1: \begin{array}{l} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ n \mapsto -n \end{array} \qquad 2) f_2: \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto n+1 \end{array} \qquad 3) f_3: \begin{array}{l} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ n \mapsto \begin{cases} n+2\ si\ n\ pair \\ n+4\ si\ n\ impair \end{cases} \end{array}$$

$$4) f_4: \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (x+y, x-y) \end{array} \qquad 5) f_5: \begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto z^2 \end{array}$$

Exercice 05 : Soient les applications $f\ et\ g$, de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, définies par :

$$f(n) = 2n\ et \quad g(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2}\ si\ n\ pair \\ 0 \text{ si n } impair \end{cases}$$

Déterminer $g \circ f\ et\ f \circ g$. Les applications $f\ et\ g$ sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

Exercice 06 : Soit

$$f \quad \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{2x}{1+x^2} \end{array}$$

1. f est-elle injective ? surjective ?
2. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1,1]$.
3. Montrer que la restriction

$$g \quad [-1,1] \to [-1,1]$$
$$x \mapsto g(x) = f(x)$$

est une bijection, et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 07 : Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{R}^*$par :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow xy > 0$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Soit $\tilde{\mathcal{R}}$ la relation définie sur l'ensemble des réels par :
$$x\tilde{\mathcal{R}}y \Leftrightarrow xy \geq 0$$
Est-elle une relation d'équivalence ?

Exercice 08 : Soit l'ensemble $E = \{1,2,3,5,8,14,17\}$, et soit la relation définie par :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \frac{x+y}{2} \in \mathbb{N}$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans E , et trouver ses classes d'équivalence.

Exercice 09 : On définit dans $\mathbb{Z}$ la relation S par :

$$aSb \Leftrightarrow a \leq b + 1$$

1. Vérifier que $0S1\ et\ 1S0$, que peut-on déduire ?
2. Soit la relation R définit dans $\mathbb{Z}$, par : $aRb \Leftrightarrow a < b + 1$. Montrer que R est une relation d'ordre.

Exercices Supplémentaires :

Exercice 01 : Déterminer une bijection :

- de$\mathbb{N}\ dans\ \mathbb{N}^*$
- de $\left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\} dans\ \left\{\frac{1}{n}, n \geq 2\right\}$
- de $[0,1]$ dans $[0,1]$

Exercice 02 : Soient E et F deux ensembles et $f: E \to F$ une application.

- Montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$où $A\ et\ B\ sous\ ensembles\ de\ E$. L'inclusion réciproque est-elle vraie ? Dans quel cas ?
- Montrer que si $f(A) \cap B = \emptyset$ alors $A \cap f^{-1}(B) = \emptyset$, où$A \in \wp(E) et\ B \in \wp(F)$

Exercice 03 : $f: E \to F, \quad g: F \to G\ et \quad h = g \circ f\ des\ applications.$

- Montrer que si h est injective, alors f l'est aussi. Si de plus f est surjective alors g est injective.
- Montrer que si h est surjective, alors g l'est aussi. Si de plus g est injective alors f est surjective.