Université Aboubekr Belkaid-Tlemcen

Module : Mathématiques 1

1ère Année Sciences et technologies

Série de TD 01- Logique et raisonnements

Exercice 01 : Soit le nombre $A = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$, montrer que $A^3 = 4 - 3A$.

En déduire que A=1.

Exercice 02 : Montrer que

$$\text{pour tout x, y } \in \mathbb{R}, \text{on a } \begin{cases} |x+y| \leq |x| + |y| \\ |x-y| \geq \big||x| - |y|\big| \end{cases}$$

Exercice 03 : Mettre sous forme d'intervalles (ou unions d'intervalles) les ensembles suivants :

$$A = \{x \in \mathbb{R};\ \big|x + |x|\big| \geq 2\}, B = \{x \in \mathbb{R};\ x^2 \leq 4\ et\ x^2 \neq 1\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{R};\ \sqrt{x+1} < 1\}$$

Exercice 04 : Soit n un entier naturel non nul.

- Calculer $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\ \ et\ \prod_{k=0}^{n}(-1)^k$
- Vérifier que $\frac{2}{k^2-1} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}$,puis calculer la valeur $U = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2-1}$
- Calculer $V = \sum_{k=1}^{n} k\ k!\ et\ W = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$ (**Indication :** poser k=(k+1)-1)
- Développer $P(x) = (x+1)^n$ en utilisant le binôme de Newton. En déduire les valeurs des sommes : $S = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\ \ et\ T = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k$

Exercice 05 : Soient P,Q et R des propositions.

1) En utilisant la table de vérité, montrer que la proposition :
   $[(P \Longrightarrow Q) \wedge (\bar{P} \Longrightarrow Q)] \Longrightarrow Q$, est toujours vraie.
   Application : soit $n \in \mathbb{N}^*, montrer\ que\ n(n+1) est\ pair.$
2) Sans utiliser la table de vérité, montrer que :
   $(i)\ \left[\overline{(P} \Longrightarrow Q)\wedge R\right] \Leftrightarrow [(\bar{P}\vee\bar{R}) \Longrightarrow (Q\wedge R)] \quad (ii)[(\bar{P}\vee Q)\wedge(P\vee\bar{Q})] \Leftrightarrow (P \Leftrightarrow Q)$
3) La proposition $[(P\wedge Q) \Longrightarrow (\bar{P}\vee Q)]$ est-elle vraie ?

Exercice 06 : Ecrire, à l'aide de quantificateurs, les propositions suivantes :

1. Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré.
2. Aucun entier n'est supérieur à tous les autres.
3. Il existe un entier multiple de tous les autres.

4. Entre deux réels distincts, il existe un rationnel.

Exercice 07 : Soit la proposition
$(P): pour\ tout\ entier\ n \geq 2, si\ (n^2 - 1)\ n'est\ pas\ divisible\ par\ 8, alors\ n\ est\ pair$

1. Définir la contraposée de cette proposition.
2. Démontre qu'un entier naurel impair n s'écrit sous la forme
   $n = 4k + r\ avec\ k\ entier\ et\ r \in \{1,3\}$
3. Prouver la contraposée de (P). Que peut-on déduire ?

Exercice 08 : En utilisant un raisonnement par l'absurde, montrer que :

1) La longueur d'un rectangle d'aire égale à $170\ m^2$, est supérieure à 13m.
2) Pour tout entier naturel premier supérieur ou égal à 2, on a $\sqrt{n}$ est un irrationnel.
3) La somme d'un nombre rationnel et d'un irrationnel est un nombre irrationnel.

Exercice 09 : Montrer par récurrence :

1) $\forall n \in \mathbb{N}, 4^n + 5\ est\ un\ multiple\ de\ 3$
2) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3) $\forall a \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, (1+a)^n \geq 1 + na$
4) $\forall n \geq 1, (n+1)! \geq \sum_{k=1}^{n} k!$