Université Abou Bekr Belkaid **A.U 2018-2019**
Faculté des Sciences
Tronc Commun SM

FEUILLE D'EXERCICES N°2
Relations et Applications

Exercice 1: Représenter le graphe de chaque relation:

1. $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $F = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
   $\forall (x, y) \in E \times F :\ x\mathcal{R}y \iff x = 2y + 1.$
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}; x\mathcal{T}y \iff x^2 + y^2 = 4.$

Exercice 2: Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{R}$ une relation sur E dont le graphe est

$$G_{\mathcal{R}} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}$$

Vérifier que la relation $\mathcal{R}$ est refléxive, symétrique et transitive.

Exercice 3: Dire si les relations suivantes sont réflexives, symétriques, anti-symétriques ou transitives.

1. $\forall x, y \in \mathbb{Z};\ x\mathcal{R}y \iff x = -y.$
2. $\forall x, y \in \mathbb{R};\ x\mathcal{T}y \iff \cos^2 x + \sin^2 y = 1.$

Exercice 4: On définit sur $\mathbb{R}^2$, la relation $\mathcal{R}$ par:

$$\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2, (x, y)\mathcal{R}(x', y') \iff x \leq x \text{ et } y \leq y'.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$. L'ordre est-il total?
2. Soit $D = \{(1, 2), (3, 1)\}$ D a-t-il des majorants? Un plus grand élément? Une borne supérieur?

Exercice 5: On considère l'ensemble ordonné $(\mathbb{R}, \leq)$. Pour chacune des parties $A_i \subset \mathbb{R}$ ci-dessous, déterminer si A_i est majorée, minorée, bornée, si elle admet une borne supérieure, une borne inférieure, un maximum, un minimum.

$$A_1 = \{1, 2, 4, 6, 12, 14\},\ A_2 = \mathbb{N},\ A_3 = \{3 + 5n;\ n \in \mathbb{N}\},\ A_4 =]5, 6].$$

Exercice 6 Soit $E = \{1, 2, 3\}$ et $F = \{1, 2, 3, 4\}$. Tracer le graphe des relations

de E dans F (Diagramme sagittal) définies ci-dessous et dans chaque cas, dire s'il s'agit d'une fonction ou d'une application.

1. $\forall (x, y) \in E \times F\ x\mathcal{R}_1 y \iff x \geq y.$
2. $\forall (x, y) \in E \times F\ x\mathcal{R}_2 y \iff x - y + 2 = 0.$

3. $\forall (x,y) \in E \times F \; x\mathcal{R}_3 y \iff x = y$.

Exercice 7: Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1 + x^2$. Déterminer l'image directe et réciproque par f des ensembles suivants.

$$A = [0,1],\; B =]-1,4],\; C = [0,+\infty[,\; D =]-\infty,5].$$

Exercice 8: Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \ln(|x| + 1/e)$

1. Calculer $f(-1),\; f(1),\; f(0)$.
2. D'éterminer l'image directe de $\mathbb{R}$.
3. L'application f est-elle injective? Surjective? Justifier.
4. Les propositions suivantes sont-elles vraies? Justifier.
   $f^{-1}(-1) = 0,\; f^{-1}(\{-1\}) = \{0\}$
5. Montrer que la restriction $g\colon [0,+\infty[\to [-1,+\infty[;\; g(x) = f(x)$ est une bijection et donner son application réciproque.

Exercice 9: Soit les applications $f\colon \mathbb{R} \to]-1,+1[$ et $g\colon]-1,+1[\to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \; et \; g(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$ puis en déduire que f admet une application réciproque que l'on déterminera.

Exercice 10 Les applications suivantes sont-elles injectives? Surjectives?

Bijectives?

$$f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z};\; f(n) = 2n,\; g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N};\; g(n) = n+1,\; h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N};\; h(n) = E\left(\frac{n}{2}\right).$$