

FEUILLE D'EXERCICES N°1
Logique et Ensembles

Exercice 1: Pour $x \in \mathbb{R}$, on considère.

$$x^2 + x - 6 = 0, \quad (1)$$

$$-3x^2 + x + 5/4 > 0. \quad (2)$$

Indiquer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

1. $x = 2$ est solution de l'équation (1) et $x = -1$ est solution de l'inéquation (2).
2. $x = -2$ est solution de l'équation (1) ou $x = 3/4$ est solution de l'inéquation (2).
3. L'ensemble des solutions de l'inéquation (2) est $] -1/2, 5/6[$ implique $x^2 + x - 6$ divise $(x + 2)$.

Exercice 2: Pour toutes propositions p, q et r , vérifier que les propositions suivantes sont des tautologies:

1. $[(p \implies q) \implies p] \implies p$. (Table de vérité)
2. $[(p \vee q) \implies r] \iff ((p \implies r) \wedge (q \implies r))$. (Deux méthodes)

Exercice 3: On considère la proposition suivante: " Si le TD de Maths a commencé alors tous les étudiants sont en salle"

1. Ecrire la contraposée et la négation de la proposition.
2. Si la proposition est vraie et on constate que tous les étudiants sont en salle, peut-on déduire que le TD a commencé?

Exercice 4 Résoudre le système suivant. $\begin{cases} (x-1)(y-2) = 0 \\ (x-2)(y-3) = 0 \end{cases}$ où $x, y \in \mathbb{R}$.

Exercice 5 Pour chaque énoncé, écrire la négation, puis dire si l'énoncé initial est vrai ou faux (justifier votre réponse).

1. $\forall n \in \mathbb{N}; 3n^2 + 2n + 1 \leq n^3$.
2. $\exists n \in \mathbb{N}^*; n^2 + 9 < 6n$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}; 2x + y \geq 0$.

4. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}; 2x + y > 0.$
5. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}; 2x + y > 0.$
6. $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, 2x + y > 0.$
7. $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}; \sin(x + y) = x + y.$

Exercice 6 Considérons les ensembles suivants

$$A = \{x \in \mathbb{R}; |x| \leq 3\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R}; \frac{x^2-1}{x-2} \leq 0\},$$

$$C = \{x \in \mathbb{R}; x^2 + x - 20 \leq 0\}$$

- Déterminer $A \cap B, A \cup \mathbb{C}_{\mathbb{R}}B, A - B, \mathbb{C}_A(A \cap B), \mathbb{C}_CA.$

Exercice 7 Montrer que

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 3x + 7 > 0.$
2. $\forall n \in \mathbb{Z}, n^2 \text{ impair} \implies n \text{ impair}.$
3. $\sqrt{2}$ est irrationnel.
4. $\forall n \in \mathbb{N} : 5 + 8 + 11 + \dots + (5 + 3n) = 5(n + 1) + \frac{3n(n+1)}{2}.$
5. $\forall x, y \in \mathbb{R}, x^2 = y^2 \iff |x| = |y|.$