Université de Tlemcen

Faculté des Sciences

Département des Mathématiques

Lundi 09 Septembre 2019

Module : Math 1- Tronc commun ST

Durée : 1 h-30mns

Examen de rattrapage

« L'usage de la calculatrice est strictement interdit »

Exercice 01 : Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{Z}^*$ par :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \ divise \ y$$

1. Vérifier cette relation pour les couples (x, y) suivants : $(2,6); (6,2); (2,-2); (-2,2);\ (2,3) et\ (3,2)$
2. La relation $\mathcal{R}$ est-elle symétrique ?antisymétrique ? justifier soigneusement votre réponse.
3. Considérons la relation, notée $\tilde{\mathcal{R}}$, définie sur $\mathbb{N}^*$par : $x\tilde{\mathcal{R}}y \Leftrightarrow x \ divise \ y$
   Monter que c'est une relation d'ordre partiel.

Exercice 02 : On considère l'application continue sur $[-3,2]$ dont le tableau de variation est le suivant :

x	-3		-2		1		2
f			5				2
		↗		↘		↗	
	-2				0		

1. Déterminer les images, par f, des intervalles $[-2,1], [-2,2], [-3,1]$.
2. Déterminer le nombre des solutions des équations $f(x) = 0 \ et \ f(x) = 1$.
3. Cette application est –elle injective ? Bijective ?

Exercice 03 :

1. Citer le théorème des accroissements finis .
2. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que

$$\forall x > 0, \frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}$$

(**Indication :** on applique le théorème à la fonction ($f: t \longmapsto \ln(t)\,, t > 0$) sur l'intervalle $[x, x+1] \ tel \ que \ x > 0$)

3. Calculer $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}(\ln(x+1) - \ln(x))\ \ et\ \ \lim_{x\to+\infty} x(\ln(x+1) - \ln(x))$
4. En déduire que : $\lim_{x\to+\infty}(1 + \frac{1}{x})^x = e$

Exercice 04 : On rappelle que $\sqrt{2}$ est nombre irrationnel.

1. Démontrer par l'absurde que
$$Si \ a, b \in \mathbb{Z} \ tels \ que \ a + b\sqrt{2} = 0, alors \ a = b = 0$$
2. En déduire que $si \ m, n, p, q \in \mathbb{Z}, alors \ \left(m + n\sqrt{2}\right) = \left(p + q\sqrt{2}\right) \Longrightarrow (m = p \ et \ n = q)$

Université de Tlemcen - Faculté des sciences année universitaire: 2018-2019

L1 Tronc commun ST Module: Math1

Corrigé: Examen de rattrapage

Exercice 1 $(5pts)$

Dans $\mathbb{Z}^*$, on définit la relation $\Re$ pa: $x \Re y \Leftrightarrow x$ divise y $\left(\exists\, k \in \mathbb{Z}^* \;:\; y = k\,x\right)$

1) 2 divise 6 $(6 = 3.2) \rightarrow 2 \Re 6$, 6 ne divise pas $2 \rightarrow 6\,(non\Re)2 \ldots\ldots\ldots\ldots (0,5)$

2 divise -2 $-(2 = (-1)2) \rightarrow 2 \Re -2$, -2 divise 2 $-(-2 = 1(-2)) \rightarrow -2 \Re 2 \ldots\ldots (0,5)$

2 ne divise pas 3 et 3 ne divise pas 2 $\rightarrow 2 \rightarrow 2\,(non\Re)3$ et $3\,(non\Re)2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (0,5)$

2) $\Re$ n'est pas symétrique car $\exists\, x = 2\,, y = 6 \;:\; 2 \Re 6$ et $6\,(non\Re)2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (0,5)$

$\Re$ n'est pas antisymétrique car $\exists\, x = 2\,, y = -2 \;:\; 2 \Re -2$ et $-2 \Re 2$ mais $2 \neq -2 \ldots\ldots (0,5)$

3) Dans $\mathbb{N}^*$, on définit la relation $\widetilde{\Re}$ pa: $x \widetilde{\Re} y \Leftrightarrow x$ divise y $\left(\exists\, k \in \mathbb{Z}^* \;:\; y = k\,x\right)$

Montrons que $\widetilde{\Re}$ est une relation d'ordre partiel.

. Réflexivité: $\forall \in \mathbb{N}^*$, x divise x $(x = 1.x) \Rightarrow x \widetilde{\Re} x$ donc $\widetilde{\Re}$ est réflexive.......$(0,5)$

. Antisymétrie:

Soient $x, y \in \mathbb{N}^*$: $\begin{cases} x \widetilde{\Re} y \\ y \widetilde{\Re} x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \text{ divise } y \\ y \text{ divise } x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists\, k \in \mathbb{N}^* \;:\; y = k\,x \\ \exists\, n \in \mathbb{N}^* \;:\; x = n\,y \end{cases}$

$$\Rightarrow x = nkx \Rightarrow nk = 1$$
$$\Rightarrow n = k = 1\ (n,k \in \mathbb{N}^*)$$
$$\Rightarrow x = y \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; (0,5)$$

ce qui prouve que $\widetilde{\Re}$ est antisymétrique.

. Transitivité:

Soient x, y et $z \in \mathbb{N}^*$: $\begin{cases} x \widetilde{\Re} y \\ y \widetilde{\Re} z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \text{ divise } y \\ y \text{ divise } z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists\, k \in \mathbb{N}^* \;:\; y = k\,x \\ \exists\, n \in \mathbb{N}^* \;:\; z = n\,y \end{cases}$

$$\Rightarrow z = nk.x$$
$$\Rightarrow x \widetilde{\Re} z \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (0,5)$$

donc $\widetilde{\Re}$ est transitive

Comme $\widetilde{\Re}$ est réflexive, antisymétrique et tansitive alors $\widetilde{\Re}$ est une relation d'ordre........$(0,5)$

Cet ordre est partiel, car $\exists\, x = 2\,, y = 3 \;:\; 2\,(non\Re)\,3$ et $3\,(non\Re) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (0,5)$

Exercice 2 $(5pts)$

$f : \left[-3,\ 2\right] \rightarrow \mathbb{R}$ continue .

1) D'aprés le tableau de variation

$f([-2,1]) = [0,5]$, $\quad f([-2,2]) = [2,5]$, $\quad f([-3,1]) = [-2,0] \ldots\ldots 3 \times (0,5)$

2) $f(x) = 0$

$$\begin{cases} f \text{ continue sur } [-3,2] \\ f(-3).f(-2) < 0 \end{cases} \Rightarrow (T.V.I)\ \exists\, c \in\,]-3,2[\ : f(c) = 0$$

de plus, ona $f(1) = 0$. $f(x) = 0$ admet deux solutions 1 et $c \in\,]-3,2[\ldots\ldots\ldots\ldots ; (1)$

$f(x) = 1$

$f \nearrow$ de -2 à 5 sur $[-3,2] \rightarrow \exists\, c_1 \in\,]-3,2[\ : f(c_1) = 1$

$f \searrow$ de -5 à 0 sur $[-2,1] \rightarrow \exists\, c_2 \in\,]-2,1[\ : f(c_2) = 1$

$f \nearrow$ de 0 à 2 sur $[1,2] \to \exists\, c_3 \in]1,2[: f(c_3) = 1$

$f(x) = 1$ admet trois solutions...;(1)

3) f n'est pas injective, car d'aprés 2) $f(x) = 0$ admet deux solutions

$(f(c) = f(1) = 0, (c \neq 1))\ldots\ldots\ldots(1)$

et par suite f n'est pas bijective...$(0,5)$

Exercicde 3 $(6pts)$

1) Théorème des accroissements finis:......(1)

$$\begin{cases} f : [a,\ b] \to \mathbb{R}, \text{continue sur } [a,\ b] \\ f \ \text{ dérivable sur }]a,b[\end{cases} \Rightarrow \exists\, c \in]a,b[: f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$$

2) $f(t) = \ln t,\ t \in [x, x+1],\ x > 0$

f est continue sur $[x, x+1]$ et dérivable sur $]x, x+1[$ pour $x > 0$, d'aprés $T.A.F$,

$\exists\, c \in]x, x+1[: f(x+1) - f(x) = (x+1-x)f'(c)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(0,5)$

$\ln(x+1) - \ln x = \frac{1}{c}$ ⊛..$(0,5)$

$c \in]x, x+1[\Rightarrow x < c < x+1 \Rightarrow \frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$..............................$(0,5)$

la relation ⊛ $\Rightarrow \forall x > 0 : \frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(0,5)$

3)

$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{x}}{x+1} < \sqrt{x}\,[\ln(x+1) - \ln x] < \frac{\sqrt{x}}{x}$$

et comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = 0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}\,[\ln(x+1) - \ln x] = 0$ ....(1)

(Téorème de l'encadrement)

de même

$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{x}{x+1} < x[\ln(x+1) - \ln x] < \frac{x}{x} = 1$$

et comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} x[\ln(x+1) - \ln x] = 1\ldots(1)$

4)

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} x[\ln(x+1) - \ln x] = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} x\left[\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\right] = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$

$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = e^1 = e\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$

Exercice 4 $(4pts)$

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

1) Montrons par l'absurde que: $a,\ b \in \mathbb{Z},\ a + b\sqrt{2} = 0 \Rightarrow a = b = 0$

Supposons que $a + b\sqrt{2} = 0$ et $(a \neq 0$ ou $b \neq 0)$. ....(1)

Alors nécessairement $b \neq 0$, car si $b = 0$ alors on devrait aussi avoir $a = 0$, ...;$(0,5)$

ce qui est contraire à l'hypothèse $(a,b) \neq (0,0)$

$a + b\sqrt{2} = 0 \Rightarrow \sqrt{2} = -\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ ce qui contredit l'hypothèse $(\sqrt{2} \notin \mathbb{Q})\ldots\ldots\ldots\ldots;(1)$

2) $m,n,p,q \in \mathbb{Z}, m + n\sqrt{2} = p + q\sqrt{2} \Rightarrow (m = p$ et $m = q)$

$m + n\sqrt{2} = p + q\sqrt{2} \Rightarrow (m-p) + (n-q)\sqrt{2} = 0$

$\Rightarrow (m-p) = (n-q) = 0 \Rightarrow m = p$ et $n = q\ldots\ldots(1,5)$