Université Abou Bekr Belkaid **A.U 2018-2019**
Faculté des Sciences- T.C SM **06/01/2019**

Epreuve Finale (MATHS1)-1^h30^{mn}
(L'usage de la calculatrice est strictement interdit)

Exercice 1(cours):(10pts)

1. Soit $P(x) = x^2 + 4x + 8; x \in \mathbb{R}$.
   (a) (1 point) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.
   (b) (1 point) Ecrire $P(x)$ sous la forme d'une somme de deux carrés.
   (c) (2 points) En déduire la primitive de g; $g(x) = \frac{1}{P(x)}$.
2. On considère l'application $f\colon [0, \pi] \to [-1, 1]$ définie par
$$f(x) = \cos(x).$$
   Rappelons que $x \mapsto \arccos(x)$ est l'application réciproque de f notée f^{-1}.
   (a) (2 points) f^{-1} est-elle paire? Justifier votre réponse.
   (b) (2 points) En utilisant l'intégration par partie, calculer l'intégrale indéfinie suivante.
$$\int \arccos(x)\, \mathrm{d}x.$$
3. (2 points) Montrer que $\arccos(x) + \arccos(-x) = \pi$; $\forall x \in [-1, 1]$.

Exercice 2:(05pts) On définit une relation ∇ sur $\mathbb{R}$ par:
$$x \nabla y \iff \exists n \in \mathbb{N},\ y = x^n.$$

1. (4 points) Montrer que ∇ est une relation d'ordre.
2. (1 point) Cet ordre est-il total?

Exercice 3:(05pts) Soit la fonction définie par:
$$f(x) = \begin{cases} \cos\Big(\sin(x)\Big) & \text{si } x \le 0; \\ 1 + x^2 \ln(1 + x) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

1. (1 point) Déterminer le domaine de définition de f.
2. (2 points) f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
3. (2 points) Calculer la dérivée de f sur $\mathbb{R}^*$. f est-elle dérivable en 0?

Bon courage

Université Abou Bekr Belkaid **A.U 2018-2019**
Faculté des Sciences- T.C SM **06/01/2019**

Corrigé de l'Epreuve Finale (Maths1)-1^h30^{mn}

Exercice 1(cours):(10pts)

1. Soit $P(x) = x^2 + 4x + 8;\ x \in \mathbb{R}$.
   (a) (1 point) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.

   Solution: Pour résoudre l'équation, on calcule le discriminant: $\Delta = -16 < 0$, ainsi l'équation n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$.

   (b) (1 point) Ecrire $P(x)$ sous la forme d'une somme de deux carrés.

   Solution: $P(x) = (x+2)^2 + 2^2$

   (c) (2 points) En déduire la primitive de g; $g(x) = \frac{1}{P(x)}$.

   Solution: $\int g(x)\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2+2^2} \overset{(\mathbf{0.5})}{=} (1/4)\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\left(\frac{x+2}{2}\right)^2} \overset{(\mathbf{0.25})}{=}$
   $(1/2)\displaystyle\int \frac{1/2\mathrm{d}x}{1+\left(\frac{x+2}{2}\right)^2} \overset{(\mathbf{01})+(\mathbf{0.25})}{=} (1/2)\arctan\left(\frac{x+2}{2}\right) + C;\ C \in \mathbb{R}.$

2. On considère l'application $f\colon [0,\pi] \to [-1,1]$ définie par

$$f(x) = \cos(x).$$

   Rappelons que $x \mapsto \arccos(x)$ est l'application réciproque de f notée f^{-1}
   (a) (2 points) f^{-1} est-elle paire? Justifier votre réponse.

   Solution: La fonction $x \mapsto \cos(x)$ est paire sur $\mathbb{R}$ mais ne l'est pas sur $[0,\pi]$ car si $x \in [0,\pi]$ alors $-x \notin [0,\pi]$ **(01)** donc la fonction $x \mapsto \arccos(x)$ ne l'est pas non plus.**(01)** (Une justification par un graphe est acceptable.)

   (b) (2 points) En utilisant l'intégration par partie, calculer l'intégrale indéfinie suivante.

$$\int \arccos(x)\ \mathrm{d}x.$$

Solution: Soit $\begin{cases} u \overset{\textbf{(0.25)}}{=} \arccos(x); \\ \mathrm{d}v \overset{\textbf{(0.25)}}{=} \mathrm{d}x. \end{cases} \implies \begin{cases} \mathrm{d}u \overset{\textbf{(0.25)}}{=} -\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}; \\ v \overset{\textbf{(0.25)}}{=} x. \end{cases}$

Par conséquent $\displaystyle\int \arccos(x)\ \mathrm{d}x \overset{\textbf{(0.25)}}{=} x.\arccos(x) + \int \frac{x.\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \overset{\textbf{(0.75)}}{=}$ $x.\arccos(x) - (1-x^2)^{\frac{1}{2}} + C;\ C \in \mathbb{R}$.

3. (2 points) Montrer que $\arccos(x) + \arccos(-x) = \pi;\ \forall x \in [-1, 1]$.

Solution: Soit $t = \arccos(-x);\ \forall x \in [-1, 1]$ **(0.25)** donc $\cos(t) = \cos(\arccos(-x)) = -x$**(0.5)**.
Par ailleurs $x = -\cos(t) \overset{\textbf{(0.5)}}{=} \cos(\pi - t)$. En appliquant $x \mapsto \arccos(x)$ aux deux membres de l'égalité,**(0.25)** on obtient $\arccos(x) = \pi - t$**(0.5)** ce qui est équivalent à $\arccos(x) + \arccos(-x) = \pi$.

Exercice 2:(05pts) On définit une relation ∇ sur $\mathbb{R}$ par:

$$x \nabla y \iff \exists n \in \mathbb{N},\ y = x^n.$$

1. (4 points) Montrer que ∇ est une relation d'ordre.

Solution: Montrons alors que la relation est réflexive, antisymétrique et transitive.

- ∇ est réflexive $\iff \forall x \in \mathbb{R};\ x \nabla x$**(0.25)**
  On a $\forall x \in \mathbb{R}; x = x^1$ ici $n = 1 \in \mathbb{N}$ donc ∇ est réflexive.**(0.25)**

- ∇ est antisymétrique $\iff \forall x, y \in \mathbb{R};\ x \nabla y$ et $y \nabla x \implies x = y$**(0.25)**

  Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $\begin{cases} x \nabla y \\ y \nabla x \end{cases} \iff \begin{cases} \exists n_1 \in \mathbb{N};\ y = x^{n_1}\textbf{(0.25)} \\ \exists n_2 \in \mathbb{N};\ x = y^{n_2}\textbf{(0.25)} \end{cases}$
  $\overset{\textbf{(0.25)}}{\implies} \exists n_1, n_2 \in \mathbb{N};\ y = (y^{n_2})^{n_1} = y^{n_1.n_2}$, ce qui implique que $n_1.n_2 = 1$**(0.25)** et comme $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$**(0.25)**, alors $n_1 = n_2 = 1$**(0.25)** et par suite $x = y$.**(0.25)** Ainsi ∇ est antisymétrique.

- ∇ est transitive $\iff \forall x, y, z \in \mathbb{R};\ x \nabla y$ et $y \nabla z \implies x \nabla z$.**(0.25)**
  Soit $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $\begin{cases} x \nabla y \\ y \nabla z \end{cases} \iff \begin{cases} \exists n_1 \in \mathbb{N};\ y = x^{n_1}\textbf{(0.25)} \\ \exists n_2 \in \mathbb{N};\ z = y^{n_2}\textbf{(0.25)} \end{cases}$
  $\overset{\textbf{(0.25)}}{\implies} \exists n_1, n_2 \in \mathbb{N};\ z = (x^{n_1})^{n_2} = x^{n_1.n_2}$ et puisque $n_1.n_2 \in \mathbb{N}$ **(0.25)**

alors x est en relation avec y,**(0.25)** ainsi ∇ est transitive.
Par conséquent ∇ est une relation d'ordre.

2. (1 point) Cet ordre est-il total?

Solution: L'ordre n'est pas total, il est partiel car par exemple:
Pour $x = 5, y = 2$ il n'éxiste pas d'entiers naturels n tel que $5 = 2^n$ et n'éxiste pas d'entiers naturels n' tel que $2 = 5^{n'}$. Donc ni $5\nabla 2$ ni $2\nabla 5$.

Exercice 3:(05pts) Soit la fonction définie par:

$$f(x) = \begin{cases} \cos\Big(\sin(x)\Big) & \text{si } x \leq 0; \\ 1 + x^2\ln(1+x) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

1. (1 point) Déterminer le domaine de définition de f.

Solution: $D_f = \mathbb{R}$**(0.5)** car $x \mapsto \cos\Big(\sin(x)\Big)$ est définie sur $\mathbb{R}\cap]-\infty, 0] =]-\infty, 0]$ et la fonction $x \mapsto 1+x^2\ln(1+x)$ est définie sur $]-1, +\infty[\cap]0, +\infty[=]0, +\infty[$ et par conséquent f est définie sur $]-\infty, 0]\cup]0, +\infty[= \mathbb{R}$.**(0.5)**(Pour la justification)

2. (2 points) f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Solution: La fonction $x \mapsto \cos\Big(\sin(x)\Big)$ est continue sur $]-\infty, 0]$.**(0.25)**, $x \mapsto 1 + x^2\ln(1+x)$ est continue sur $]0, +\infty[$.**(0.25)**
Ainsi f est continue sur $\mathbb{R}^*$, étudions la continuité de f en 0, pour celà on calcule la limite de f à droite et à gauche de 0.
$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 1 + x^2\ln(1+x) = 1 + 0 = 1 = f(1)$.**(0.5)**
$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \cos\Big(\sin(x)\Big) = 1 = f(1)$.**(0.5)** On a bien la limite à droite égale à la limte à gauche donc f est continue en 0,**(0.25)** alors elle est continue sur $\mathbb{R}$.**(0.25)**

3. (2 points) Calculer la dérivée de f sur $\mathbb{R}^*$. f est-elle dérivable en 0?

Solution: f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et

$$f'(x) = \begin{cases} -\cos(x).\sin\Big(\sin(x)\Big) \text{ si } x \leq 0; (\mathbf{0.25}) \\ 2x.\ln(1+x) + \frac{x^2}{1+x} \text{ si } x > 0.(\mathbf{0.25}) \end{cases}$$

- Dérivabilité de f en 0:

  f est dérivable en 0 $\iff \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = l$ éxiste et est finie, dans ce cas $l = f'(0)$.**(0.25)**

  Pour tout $x \in]0,+\infty[$; $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(1+x) = 0$ donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$.**(0.25)**

  D'autre part pour tout $x \in]-\infty, 0[$; $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1 - 2\sin^2\left(\frac{\sin(x)}{2}\right) - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-2\sin^2\left(\frac{\sin(x)}{2}\right)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-2\sin^2\left(\frac{\sin(x)}{2}\right)}{\left(\frac{\sin(x)}{2}\right)^2.\left(\frac{2}{\sin(x)}\right)^2.x} = \lim\limits_{x\to 0^-} -\dfrac{1}{2}.\Bigg(\dfrac{\sin\left(\frac{\sin(x)}{2}\right)}{\frac{\sin(x)}{2}}\Bigg)^2.x.\Big(\dfrac{\sin(x)}{x}\Big)^2 = -\dfrac{1}{2}.1.0.1 = 0$**(0.5)** car lorsque $x \to 0^-$; $\frac{\sin(x)}{2} \to 0^-$ et on sait que $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin(t)}{t} = 1$. Donc f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = 0$**(0.25)** et puisque $f'_d(0) = f'_g(0) = 0$ on conclut que f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.**(0.25)** Ainsi f est dérivable sur $\mathbb{R}$.