Corrigé de la série "2"
Théorème de Gauss

Exo1

1- le champ électrique pour une sphère chargée en volume.

- la surface de Gauss est une sphère de centre o et de rayon r.

- A cause de la symétrie, le champ est radial et constant dans la surface de Gauss.

$\oiint \vec{E}.\vec{dS} = \iint E.dS$ (car $\vec{E} // \vec{dS}$; dS est suivant le rayon).

$" \; E\iint dS = E.S = \frac{\Sigma Q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E.4\pi r^2 = \frac{\Sigma Q_{int}}{\varepsilon_0}$ (1)

Nous avons 2 cas:

1er cas $r < R \Rightarrow Q_{int} = ?$

$dq = \rho\, dV = \rho . 4\pi r^2 dr \Rightarrow Q_{int} = \rho.4\pi \int_0^r r^2 dr$

$Q_{int} = \rho.\frac{4}{3}\pi r^3$ donc (1) $\Rightarrow E_1\, 4\pi r^2 = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi r^3$ donc $E_1 = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$

2ème cas: $r > R \Rightarrow Q_{int} = ?$

$Q_{int} = \rho.4\pi \int_0^R r^2 dr = \rho.\frac{4}{3}\pi R^3$ donc (2) $\Rightarrow E_2.4\pi r^2 = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.\frac{4}{3}\pi R^3$

$E_2 = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$.

2- le potentiel $V(r)$.

$\left.\begin{array}{l} \vec{E} = -\vec{grad}\, V \\ E \text{ est radial} \end{array}\right\} \Rightarrow E = -\frac{dV}{dr} \rightarrow V = -\int E\, dr.$

1er cas $V_1 = -\int E_1 dr = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\int r\, dr \Rightarrow V_1 = \frac{-\rho}{6\varepsilon} . \frac{1}{r^2} + C_1$

2ème cas $V_2 = -\int E_2 dr = -\frac{\rho R^3}{3\varepsilon}\int \frac{dr}{r^2} \Rightarrow V_2 = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0} . \frac{1}{r} + C_2$.

le potentiel à l'infini $= 0$

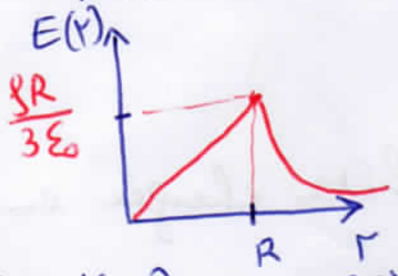
$r \to \infty \quad V_2 = 0 \Rightarrow \lim_{r\to\infty} V_2 = C_2 = 0 \quad V_2 = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon r}$.

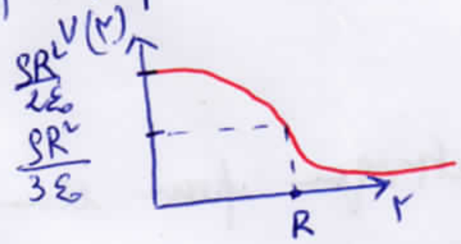
le potentiel est une fonction continue $\Rightarrow V_1(R) = V_2(R)$.

$\rho R^3 / 3\varepsilon R = -\rho / 6\varepsilon_0 R^2 + C_1 \Rightarrow$ donc $C_1 = \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0} + \frac{\rho R^2}{6\varepsilon_0} = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}$

$$V_2 = -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} + \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}.$$

3- la représentation des champs et potentiel :





pour $r = R$ $\quad E_2(R) = \dfrac{\rho R}{3\varepsilon_0}.$

Ex:02

1. $E(r)$ pour une sphère chargée en surface.

la S.G est une sphère de centre O et de rayon r.

le champ est radial et constant dans le S.G.

$$\oiint \vec{E}\cdot\vec{dS} = \frac{\Sigma Q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E.4\pi r^2 = \frac{\Sigma Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

nous avons 2 cas :

1er cas : $r < R \Rightarrow Q_{int} = 0 \rightarrow E_1 = 0.$

2ème cas $\quad r \geq R$: $Q_{int} = ?$ $\qquad dq = \sigma\, dS \Rightarrow Q_{int} = \sigma.S = \sigma.4\pi R^2$

$$E_2.4\pi r^2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.4\pi R^2 \Rightarrow E_2 = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}$$

2. le potentiel : $\vec{E} = -\vec{grad}\,V$ avec E est radial $\Rightarrow E = -\dfrac{dV}{dr}.$

$V(r) = -\int E\, dr.$

1er cas $\quad V_1 = -\int E_1\, dr \Rightarrow V_1 = C_1.$

2ème cas $\quad V_2 = -\int E_2\, dr \Rightarrow V_2 = -\dfrac{\sigma R^2}{\varepsilon_0}\int\dfrac{dr}{r^2}$ $\qquad V_2 = \dfrac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r} + C_2.$

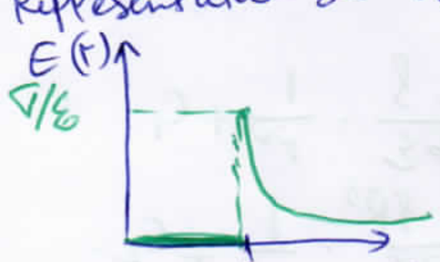
le potentiel à l'infini = 0.

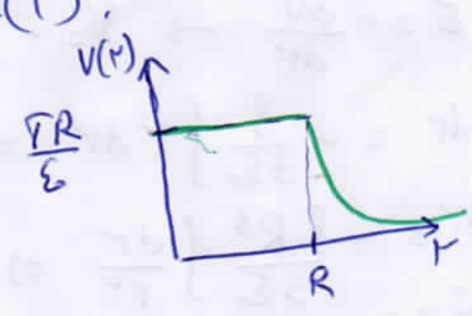
$V_{2\,(r\to\infty)} = C_2 = 0 \qquad V_2 = \dfrac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r}.$

le potentiel est continu en R $\Rightarrow V_1(R) = V_2(R)$.

$$\frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 R} = C_1 \Rightarrow V_1 = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}$$

3. Représentation de $V(r)$ et $E(r)$.





$$E_2(R) = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 R^2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Ex:03

1. $E(r)$ pour une distribution volumique de charges entre 2 sphères.

. le S.G est une sphère de centre O et de rayon r.

. A cause de la symétrie, le champ est radial et constant dans la S.G.

il y a 3 cas : $\oiint \vec{E}.\vec{ds} = \frac{\Sigma Q_{int}}{\varepsilon} \Rightarrow E.4\pi r^2 = \frac{\Sigma Q_{int}}{\varepsilon_0}$ (1)

<u>1er cas</u> $r < R_1$ $Q_{int} = 0$.

<u>2e cas</u>: $R_1 < r < R_2$ $Q_{int} = ?$ $dq = \rho dV = \rho . 4\pi r^2 dr$.

$Q_{int} = \rho . 4\pi \int_{R_1}^{r} r^2 dr = \rho . \frac{4}{3}\pi (r^3 - R_1^3)$.

(1) $\Rightarrow E_2 . 4\pi r^2 = \frac{\rho}{\varepsilon} . \frac{4}{3}\pi (r^3 - R_1^3)$ donc $E_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon}\left(r - \frac{R_1^3}{r^2}\right)$.

<u>3e cas</u>: $r \geq R_2$.

$Q_{int} = \rho . 4\pi \int_{R_1}^{R_2} r^2 dr = \rho . \frac{4}{3}\pi (R_2^3 - R_1^3)$.

(1) $\Rightarrow E_3 . 4\pi r^2 = \frac{\rho}{\varepsilon_0} . \frac{4}{3}\pi (R_2^3 - R_1^3)$ donc $E_3 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{R_2^3 - R_1^3}{r^2}\right)$.

2. le potentiel :

$\vec{E} = -\vec{grad} V \Rightarrow E = -\frac{dV}{dr}$ donc $V = -\int E dr$.

<u>1er cas</u>

$E_1 = 0 \Rightarrow V_1 = C_1$

<u>2e cas</u>: $V_2 = -\int E_2 dr = -\frac{\rho}{3\varepsilon}\left[\int r dr - R_1^3 \int \frac{dr}{r^2}\right] = \frac{-\rho}{3\varepsilon}\left[\frac{r^2}{2} + \frac{R_1^3}{r}\right] + C_2$

<u>3e cas</u>: $V_3 = -\int E_3 dr = \frac{-\rho}{3\varepsilon}(R_2^3 - R_1^3)\int \frac{dr}{r^2} = \frac{\rho}{3\varepsilon}(R_2^3 - R_1^3) . \frac{1}{r} + C_3$.

. le potentiel à l'infini $= 0 \Rightarrow V_3 = 0$.

$V_{3\,(r\to\infty)} = C_3 = 0$. $V_3 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{R_2^3}{r} - \frac{R_1^3}{r}\right)$.

. le potentiel est continu :

* en $r = R_2 \Rightarrow V_3(R_2) = V_2(R_2)$ donc $\frac{\rho}{3\varepsilon}\left(\frac{R_2^3}{R_2} - \frac{R_1^3}{R_2}\right) = \frac{-\rho}{3\varepsilon}\left(\frac{R_2^2}{2} + \frac{R_1^3}{R_2}\right) + C_2$

$C_2 = \frac{\rho R_2^2}{6\varepsilon} + \frac{\rho R_2^2}{3\varepsilon} = \frac{\rho R_2^2}{2\varepsilon}$. $V_2 = \frac{-\rho}{6\varepsilon} r^2 - \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon r} + \frac{\rho R_2^2}{2\varepsilon}$.

* en $r = R_1 \Rightarrow V_2(R_1) = V_1(R_1)$

$C_1 = -\frac{\rho R_1^2}{6\varepsilon_0} - \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon R_1} + \frac{\rho R_2^2}{2\varepsilon} \Rightarrow V_1 = \frac{-\rho R_1^2}{2\varepsilon_0} + \frac{\rho R_2^2}{2\varepsilon_0}$

Ex:04

1. le champ pour 2 sphères : une de charge volumique et une autre de charge surfacique.

. la S.G est une sphère de centre O et de rayon r.

. le champ est radial et constant dans la surface de Gauss à cause de la symétrie.

$\oiint \vec{E}\cdot\vec{dS} = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E\cdot 4\pi r^2 = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon}$ (1).

Nous avons 3 cas :

1er cas : $r < R_1$ $Q_{int} = ?$ $dq = \rho\cdot 4\pi r^2 dr$

$Q_{int} = \rho\cdot 4\pi \int_0^r r^2 dr = \rho\cdot\frac{4}{3}\pi r^3$.

(1) $\Rightarrow E_1\cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \boxed{E_1 = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}}$

2e cas $R_1 \leq r < R_2$ $Q_{int} = \rho\cdot 4\pi\int_0^R r^2 dr = \rho\cdot\frac{4}{3}\pi R^3$.

(1) $\Rightarrow E_2\cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\cdot\frac{4}{3}\pi R_1^3 \Rightarrow \boxed{E_2 = \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0 r^2}}$

3e cas $r \geq R_2$ il y a 2 charges.

$Q_1 = \rho\cdot\frac{4}{3}\pi R_1^3$ et $Q_2 = \sigma\cdot S = \sigma\cdot 4\pi R_2^2$.

$Q_{int} = Q_1 + Q_2 = \rho\cdot\frac{4}{3}\pi R_1^3 + \sigma\cdot 4\pi R_2^2$.

(1) $\Rightarrow E_3\cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\cdot\frac{4}{3}\pi R_1^3 + \frac{\sigma}{\varepsilon_0} 4\pi R_2^2 \Rightarrow \boxed{E_3 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\cdot\frac{R_1^3}{r^2} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\cdot\frac{R_2^2}{r^2}}$

le potentiel :

$\vec{E} = -\vec{grad}\, V \Rightarrow E = -\frac{dV}{dr}$ (le champ est radial).

1er cas : $V_1 = -\int E_1 dr = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\int r\,dr = \boxed{\frac{-\rho r^2}{6\varepsilon_0} + C_1}$

2e cas : $V_2 = -\int E_2 dr = -\frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0}\int\frac{dr}{r^2} = \boxed{\frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0 r} + C_2}$.

3e cas : $V_3 = -\int E_3 dr = -\left(\frac{\rho}{3\varepsilon_0}R_1^3 + \frac{\sigma R_2^2}{\varepsilon_0}\right)\int\frac{dr}{r^2} = \boxed{\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\cdot\frac{R_1^3}{r} + \frac{\sigma R_2^2}{\varepsilon_0 r} + C_3}$.

le potentiel à l'infini = 0.

$V_{3\,r\to\infty} = C_3 = 0 \Rightarrow V_3 = \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0 r} + \frac{\sigma R_2^2}{\varepsilon_0 r}$.

le potentiel est continu.

* en $R_2 \Rightarrow V_3(R_2) = V_2(R_2) \Rightarrow \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0 R_2} + \frac{\sigma R_2^2}{\varepsilon_0 R} = \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0 R_2} + C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{\sigma R_2}{\varepsilon_0}$

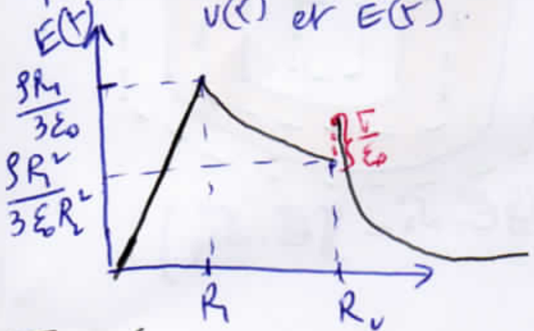
donc $V_2 = \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon r} + \frac{\sigma R_2}{\varepsilon_0}$

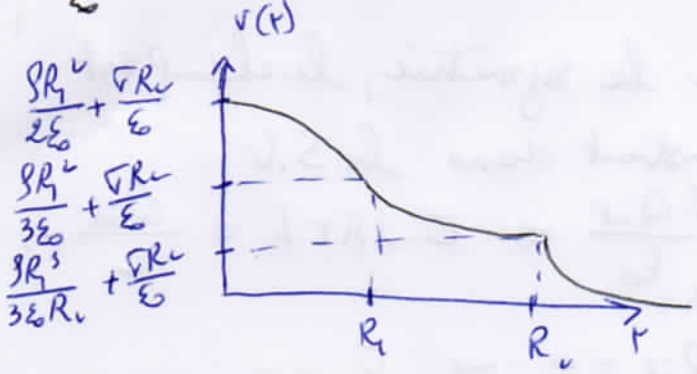
le potentiel est continu en $R_1 \Rightarrow V_1(R_1) = V_2(R_1)$

$$-\frac{\rho R_1^2}{6\varepsilon} + C_1 = \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon R_1} + \frac{\sigma R_2}{\varepsilon} \Rightarrow C_1 = \frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon} + \frac{\sigma R_2}{\varepsilon_0}$$

$$V_1 = -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon} + \frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon} + \frac{\sigma R_2}{\varepsilon}$$

Représentation de $V(r)$ et $E(r)$.



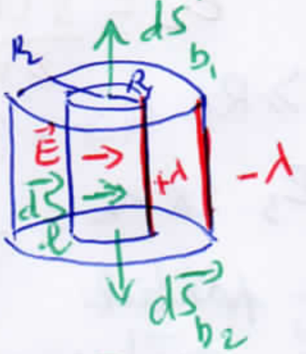


Ex:05

La S.G est un cylindre de rayon r et de hauteur h.

A cause de la symétrie, le champ est radial et constant dans la S.G.

$$\oint\!\!\oint \vec{E}\cdot\vec{dS} = \underbrace{\cancel{\iint \vec{E}\cdot\vec{dS}_{b_1}}}_{\vec{E}\perp\vec{dS}_{b_1}} + \underbrace{\cancel{\iint \vec{E}\cdot\vec{dS}_{b_2}}}_{\vec{E}\perp\vec{dS}_{b_2}} + \underbrace{\iint \vec{E}\cdot\vec{dS}_{\ell}}_{\vec{E}\parallel\vec{dS}_{\ell}}\ (1)$$



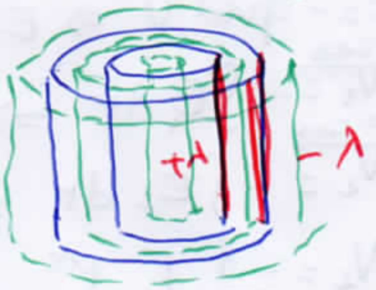
$(1) = \iint E\cdot dS_\ell = E\iint dS_\ell \Rightarrow E\cdot 2\pi r h = \frac{\Sigma Q_{int}}{\varepsilon_0}$

nous avons 3 cas

1er cas : $r < R_1 \Rightarrow Q_{int} = 0$ donc $E_1 = 0$

2ème cas $R_1 < r < R_2 \Rightarrow Q_{int} = ?$ $dq = \lambda\, dl$.

$Q_{int} = \lambda h \Rightarrow E_2\cdot 2\pi r h = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_2 = \frac{\lambda}{2\pi r\varepsilon_0}$



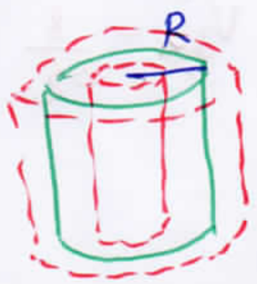
3ème cas $r > R_2 \Rightarrow Q_{int} = Q_1 + Q_2$

$Q_1 = \lambda h$ et $Q_2 = -\lambda h$ $\quad Q_{int} = Q_1 + Q_2 = \lambda h - \lambda h = 0$.

$E_3\cdot 2\pi r h = 0 \Rightarrow E_3 = 0$.

Ex:06

- La S.G est un cylindre de rayon r et de hauteur h.
- A cause de la symétrie, le champ est radial et constant dans la S.G.



$$\oint\!\!\oint \vec{E}\cdot\vec{dS} = \frac{\Sigma Q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E\cdot 2\pi r h = \frac{\Sigma Q_{int}}{\varepsilon_0}\ (1)$$

$r<R_1 \Rightarrow Q_{int}=0 \rightarrow E_1=0$

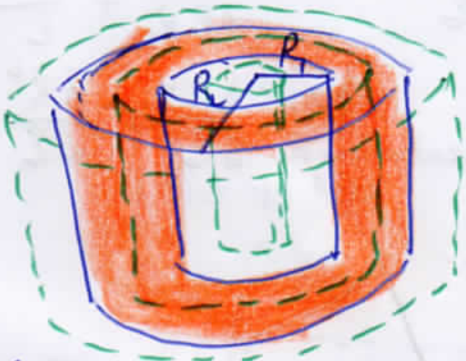
$r\geq R_1 \Rightarrow Q_{int}=?$ $\quad dq=\sigma.ds \rightarrow Q_{int}=\sigma.2\pi R h$.

$E.2\pi r h = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}2\pi R h \Rightarrow E=\frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r}$

Ex:07

. la S.G est un cylindre de rayon r et de hauteur h.

. A cause de la symétrie, le champ est radial et constant dans la S.G.



$\oiint \vec{E}.\vec{ds} = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E.2\pi r h = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$ (1) $\left(\oiint \vec{E}.\vec{ds} = \iint \vec{E}.\vec{ds_\ell}\right)$.

il y a 3 cas;

$r<R_1 \quad Q_{int}=0 \rightarrow E_1=0$

$R_1\leq r<R_2 \quad Q_{int}=?$ $\quad dq=\rho\, dV=\rho.2\pi r\, dr.h \Rightarrow Q_{int}=\rho.2\pi h\int_{R_1}^{r} r\, dr$

$Q_{int}=\rho.\pi h(r^2-R_1^2)$ avec (1) $\Rightarrow E_2.2\pi r h=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\pi(r^2-R_1^2)h$

$E_2=\frac{\rho(r^2-R_1^2)}{2r\varepsilon_0}$

$r\geq R_3 \quad Q_{int}=?$ $\quad Q_{int}=\rho.2\pi h\int_{R_1}^{R_2} r\, dr \Rightarrow Q_{int}=\rho.\pi h(R_2^2-R_1^2)$.

$E_3.2\pi r h=\frac{\rho h}{\varepsilon_0}\pi(R_2^2-R_1^2) \Rightarrow E_3=\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(\frac{R_2^2}{r}-\frac{R_1^2}{r}\right)$.

le potentiel:

$\vec{E}=-\vec{grad}\,V \Rightarrow E=-\frac{dV}{dr}\rightarrow V=-\int E\, dr$.

1er cas

$V_1=-\int E_1\, dr \Rightarrow V_1=C_1$.

2ème cas

$V_2=-\int E_2\, dr \Rightarrow V_2=-\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left[\int r\, dr - R_1^2\int\frac{dr}{r}\right]$

$V_2=\frac{-\rho}{2\varepsilon_0}\left[\frac{r^2}{2}-R_1^2.(\ln r)\right]+C_2$.

$V_2=\frac{-\rho}{2\varepsilon_0}\left(\frac{r^2}{2}+R_1^2\ln r\right)+C_2$

3ème cas

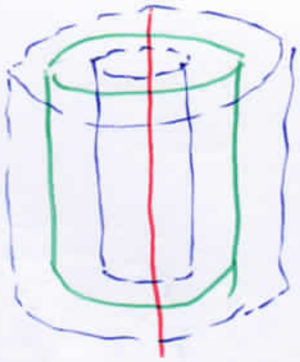
$V_3=-\int E_3\, dr=-\frac{\rho}{2\varepsilon_0}(R_2^2-R_1^2)\int\frac{dr}{r}$

$V_3=-\frac{\rho}{2\varepsilon_0}(R_2^2-R_1^2)\ln r+C_3$.

Ex:08

. la S.G est une cylindre de rayon r et de hauteur h.

. A cause de la symétrie, le champ est radial et constant dans la S.G.



1. $\oiint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \iint E \cdot dS_\ell = E \cdot 2\pi r h = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}$.

il y a 2 cas:

2. $r < R_1$ $\quad Q_{int} = ?$ $\quad dq = \lambda \, d\ell \Rightarrow Q_{int} = \lambda h$.

$E_1 \cdot 2\pi r h = \frac{\lambda h}{\varepsilon} \Rightarrow E_1 = \frac{\lambda}{2\pi r \varepsilon_0}$.

$r \geq R_2$ $\quad Q_{int} = ?$ $\quad Q = Q_1 + Q_2$ avec $Q_1 = \lambda h$ et $Q_2 = \sigma \cdot 2\pi R h$

$Q_{int} = \lambda h + \sigma \cdot 2\pi R h$.

$E_2 \cdot 2\pi r h = \frac{\lambda}{\varepsilon_0} h + \frac{\sigma h}{\varepsilon_0} \cdot 2\pi R \Rightarrow E_2 = \frac{\lambda}{2\pi r \varepsilon_0} + \frac{\sigma R}{r \varepsilon_0}$

3. $E_2 = 0 \Rightarrow \frac{\lambda}{2\pi r \varepsilon_0} = \frac{-\sigma R}{r \varepsilon_0}$ donc $\lambda = -2\pi \sigma R$.