1ère partie : Rappels mathématiques.

Exo1

$$\vec{A}\begin{pmatrix}2xyz\\ 2x^2-y\\ -yz^2\end{pmatrix} \qquad \phi = x^2y+2y^2z^3.$$

- $\text{grad}\,\phi = \vec{\nabla}\,\phi = \begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix} \cdot (x^2y+2y^2z^3)$

$= \frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k}.$

$\frac{\partial\phi}{\partial x} = 2xy \;;\; \frac{\partial\phi}{\partial y} = x^2+4yz^3 \;;\; \frac{\partial\phi}{\partial z} = 6y^2z^2.$

$\vec{\text{grad}}\,\phi = 2xy\,\vec{i} + (x^2+4yz^3)\,\vec{j} + 6y^2z^2\,\vec{k}.$

au pt $(1,0,0)$ $\vec{\text{grad}}\,\phi = \vec{j}.$

- $\text{div}\,\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \begin{pmatrix}\partial/\partial x\\ \partial/\partial y\\ \partial/\partial z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2xyz\\ 2x^2-y\\ -yz^2\end{pmatrix}.$

$= \frac{\partial(2xyz)}{\partial x} + \frac{\partial(2x^2-y)}{\partial y} + \frac{\partial(-yz^2)}{\partial z} = 2yz + (-1) - 2yz$

au pt $(1,0,0)$ $\text{div}\,\vec{A} = -1.$

- $\vec{\text{Rot}}\,\vec{A} = \vec{\nabla}\wedge\vec{A} = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ 2xyz & 2x^2-y & -yz^2\end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}(-yz^2) - \frac{\partial}{\partial z}(2x^2-y)\right)$

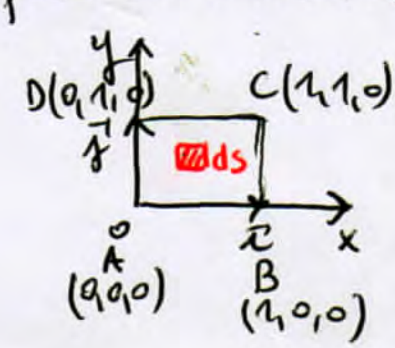
$-\vec{j}\left(\frac{\partial}{\partial x}(-yz^2) - \frac{\partial}{\partial z}(2xyz)\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}(2x^2-y) - \frac{\partial}{\partial y}(2xyz)\right)$

$\vec{\text{Rot}}\,\vec{A} = -z^2\,\vec{i} + 2xy\,\vec{j} + (4x-2xz)\,\vec{k}.$

au pt $(1,0,0)$ $\vec{\text{Rot}}\,\vec{A} = 4\,\vec{k}.$

Ex:02

le flux de $\vec{E}\begin{pmatrix}x\\ y\\ 2x+4y\end{pmatrix}$ à travers la surface du carré ABCD



le flux élémentaire

$d\phi = \vec{E}\cdot d\vec{S}.$

avec $d\vec{S} = ds\cdot\vec{n}.$

$\vec{n}$: vect. normal à la surface.

$\vec{n} = \vec{k}$

$ds = dx.dy$ donc $d\vec{S} = dx.dy.\vec{k}$. $\Rightarrow d\vec{S}\begin{pmatrix}0\\0\\dx\,dy\end{pmatrix}$.

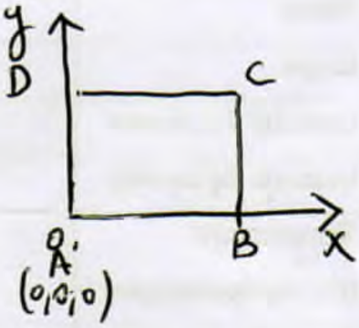
$\phi = \iint \vec{E}.d\vec{S} = \int\Big[\underbrace{\int (2x+4y)\;dx}_{①}\Big].dy.$

$① = \int_0^1 (2x+4y)\;dx = 2\int_0^1 x dx + 4y\int_0^1 dx = 2\frac{x^2}{2}\Big]_0^1 + 4yx\Big]_0^1$

$① = 1+4y.$

$\phi = \int_0^1 (1+4y)\;dy = \int_0^1 dy + 4\int_0^1 y\,dy = 1 + 4(\tfrac{1}{2}) = 3.$

Ex : 03



1. $\vec{A}\begin{pmatrix}xy\\-xy\\0\end{pmatrix}$

la circulation élémentaire $d\mathcal{C}$.

$d\mathcal{C} = \vec{A}.d\vec{l}$ avec $d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$.

$\vec{A}.d\vec{l} = \begin{pmatrix}xy\\-xy\end{pmatrix}\begin{pmatrix}dx\\dy\end{pmatrix} = xy\,dx - xy\,dy$.

$\mathcal{C} = \int \vec{A}.d\vec{l} = \underbrace{\int_{ABCDA} xy\,dx}_{①} - \underbrace{\int_{ABCDA} xy\,dy}_{②}.$

AB $\quad x_{0\to 1}$. $y=0$

BD $\quad y_{0\to 1}$ $\quad x=1$, $dx=0$

CD $\quad x_{1\to 0}$ $\quad y=1$, $dy=0$

DA $\quad y_{1\to 0}$ $\quad x=0$

$① = \int_{ABCDA} xy\,dx = \int_{AB} \cancel{xy}\,dx + \int_{BC} \cancel{xy}\,dx + \int_{CD} x\underset{1}{y}\,dx + \int_{DA} \cancel{xy}\,dx$

$① = \int_1^0 x\,dx = x^2/2\Big]_1^0 = -1/2.$

$② = \int_{ABCDA} xy\,dy = \int_{AB} xy\,\cancel{dy} + \int_{BC}\overset{1}{x}y\,dy + \int_{CD}\cancel{xy}\,dy + \int_{DA}\cancel{xy}\,dy$

$= \int_0^1 y\,dy = y^2/2\Big]_0^1 = 1/2.$

$\phi = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1.$

2. $\vec{B} = \vec{Rot}\,\vec{A} = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ xy & -xy & 0\end{vmatrix} = (-y-x)\,\vec{k}.$

le flux de $\vec{B}$.

le flux élémentaire de $\vec{B}$ $\quad d\phi = \vec{B}.d\vec{S}$ avec $d\vec{S} = dS.\vec{N}$

$\vec{N} = \vec{k}$ et $dS = dx.dy$.

$\vec{B}.d\vec{S} = \begin{pmatrix}0\\0\\-x-y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\dx.dy\end{pmatrix} = -(x+y)\;dx.dy.$ ②

$$\phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\int \underbrace{\int (x+y)\,dx}_{①}\, dy.$$

$$① = \int_0^1 x+y \;dx = \int_0^1 x\,dx + y\int_0^1 dx = \frac{x^2}{2}\Big]_0^1 + yx\Big]_0^1 = \frac{1}{2} + y.$$

$$\phi = -\int_0^1 \left(\frac{1}{2}+y\right) dy = -\left(\frac{1}{2}\int_0^1 dy + \int_0^1 y\,dy\right) = -\left(\frac{1}{2}\,y\Big]_0^1 + \frac{y^2}{2}\Big]_0^1\right).$$

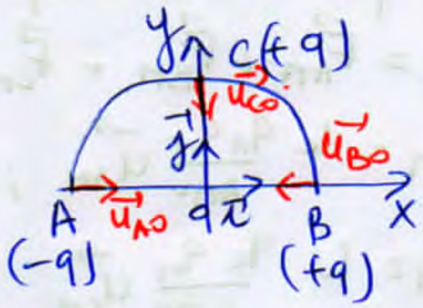
$$= -\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = -1.$$

donc $\mathcal{C}_{\vec{A}} = \phi_{\vec{B} = \vec{Rot}\,\vec{A}}$.

Théorème de Stocks.

La circulation d'1 vecteur $\vec{A}$ le long d'1 contour fermé égale au flux de son rotationnel ($\vec{B} = \vec{Rot}\,\vec{A}$) à travers la surface qui s'appuie sur ce contour.

$2^{\text{ème}}$ partie Electrostatique



Ex: 01

- le potentiel au pt O.

$$V_O = V_A + V_B + V_C = \frac{k q_A}{OA} + \frac{k q_B}{OB} + \frac{k q_C}{CO}$$

$$V_O = -\frac{kq}{R} + \frac{kq}{R} + \frac{kq}{R} \Rightarrow \boxed{V_O = \frac{kq}{R}}$$

- le champ électrique au pt O:

$$\vec{E}_O = \vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C \quad \text{avec } E_A = \frac{k q_A}{OA^2}\vec{u}_{AO}$$

$$E_B = \frac{k q_B}{OB^2}\vec{u}_{BO} \quad \text{et } E_C = \frac{k q_C}{CO^2}\vec{u}_{CO}.$$

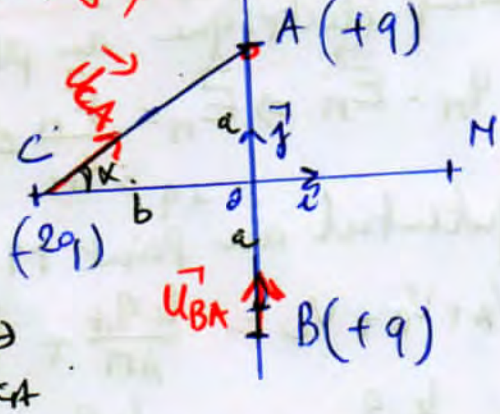
$OA = OB = OC = R$ et $\vec{u}_{AO} = \vec{i}$; $\vec{u}_{BO} = -\vec{i}$ et $\vec{u}_{CO} = -\vec{j}$.

$$\vec{E}_O = -\frac{kq}{R^2}\vec{i} + \frac{kq}{R^2}(-\vec{i}) + \frac{kq}{R^2}(-\vec{j}) \Rightarrow \vec{E}_O = -\frac{kq}{R^2}(2\vec{i} + \vec{j})$$

- le force électrique au pt O.

$$\vec{F}_O = \underset{q=}{q_O}\vec{E}_O \Rightarrow \vec{F}_O = -\frac{kq^2}{R^2}(2\vec{i} + \vec{j}).$$

Ex: 02



- force électrique au pt A:

$$\vec{F}_A = \vec{F}_{BA} + \vec{F}_{CA}$$

$$\vec{F}_{BA} = k\frac{q_B q_A}{BA^2}\vec{u}_{BA} \quad \text{et } \vec{F}_{CA} = \frac{k q_C q_A}{CA^2}\vec{u}_{CA}.$$

$BA = a + a = 2a$ et $CA^2 = CO^2 + OA^2 = a^2 + b^2$.

$\vec{u}_{BA} = \vec{j}$ et $\vec{u}_{CA} = \cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j}$ avec $\cos\alpha = \frac{CO}{CA} = \frac{b}{\sqrt{b^2+a^2}}$.

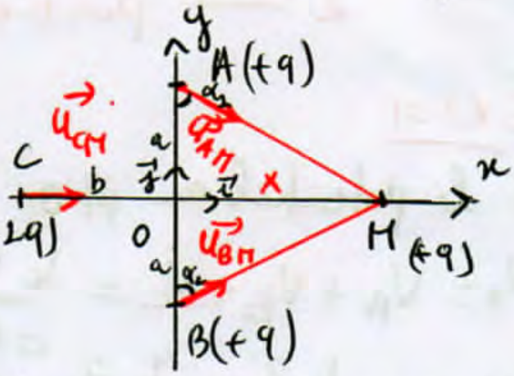
et $\sin\alpha = \frac{OA}{CA} = \frac{a}{\sqrt{b^2+a^2}}$ donc $\vec{u}_{CA} = \frac{b}{\sqrt{b^2+a^2}}\vec{i} + \frac{a}{\sqrt{b^2+a^2}}\vec{j}$.

$$\text{donc } \vec{F}_A = \frac{kq^2}{4a^2}\vec{j} + \frac{(-2kq^2)}{a^2+b^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{b^2+a^2}}(-b\vec{i} + a\vec{j}).$$

$$\vec{F}_A = kq^2\left[\frac{-2b}{(a^2+b^2)^{3/2}}\vec{i} + \left(\frac{-2a}{(a^2+b^2)^{3/2}} + \frac{1}{4a^2}\right)\vec{j}\right].$$

• le force électrique au pt M.

$\vec{F}_M = \vec{F}_{AM} + \vec{F}_{BM} + \vec{F}_{CM}$



$\vec{F}_{AM} = k\frac{q_A q_M}{AM^2}\vec{u}_{AM}$; $\vec{F}_{BM} = k\frac{q_B q_M}{BM^2}\vec{u}_{BM}$

$\vec{F}_{CM} = k\frac{q_C q_M}{CM^2}\vec{u}_{CM}$.

avec $AM^2 = AO^2 + AH^2 = a^2 + x^2$ et $BM^2 = BO^2 + OM^2 = a^2 + x^2$ et $BM = b + x$

$CM^2 = (b+x)^2$. $\vec{u}_{CM} = \vec{\imath}$; $\vec{u}_{AM} = \sin\alpha_1\,\vec{\imath} - \cos\alpha_1\,\vec{\jmath}$; $\vec{u}_{BM} = \sin\alpha_2\,\vec{\imath} + \cos\alpha_2\,\vec{\jmath}$.

$\sin\alpha_1 = \frac{OM}{AM} = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \sin\alpha_2$ et $\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2 = \frac{OB}{BM} = \frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

donc $\vec{u}_{AM} = \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}(x\vec{\imath} - a\vec{\jmath})$ et $\vec{u}_{BM} = \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}(x\vec{\imath} + a\vec{\jmath})$.

$\vec{F}_{AM} = \frac{kq^2}{(a^2+x^2)^{3/2}}(x\vec{\imath} - a\vec{\jmath})$; $\vec{F}_{BM} = \frac{kq^2}{(a^2+x^2)^{3/2}}(x\vec{\imath} + a\vec{\jmath})$; $\vec{F}_{CM} = \frac{k(-2q^2)}{(b+x)^2}\vec{\imath}$

$$\vec{F}_M = kq^2\left[\frac{1}{(a^2+x^2)^{3/2}}(x\vec{\imath} - a\vec{\jmath} + x\vec{\imath} - a\vec{\jmath}) - \frac{2\vec{\imath}}{(b+x)^2}\right].$$

$$\boxed{F_M = kq^2\left(\frac{2x}{(a^2+x^2)^{3/2}} - \frac{2}{(b+x)^2}\right)\vec{\imath}.}$$

• le champ électrique au pt M:

$\vec{F}_M = q_M \cdot \vec{E}_M \Rightarrow \vec{E}_M = \frac{\vec{F}_M}{q_M}$ donc $\vec{E}_M = 2kq\left(\frac{x}{(a^2+x^2)^{3/2}} - \frac{1}{(b+x)^2}\right)\vec{\imath}$.

$= q_M$ $+q$.

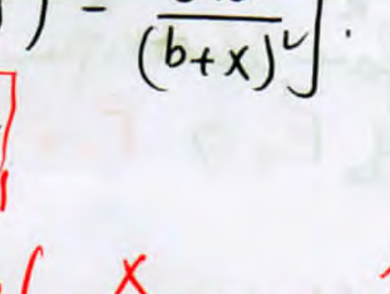
• le potentiel au point M:

$V_M = V_A + V_B + V_C = \frac{kq_A}{AM} + \frac{kq_B}{BM} + \frac{kq_C}{CM}$.

$$V_M = \frac{kq}{\sqrt{a^2+x^2}} + \frac{kq}{\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{2kq}{b+x} \Rightarrow V_M = 2kq\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{1}{b+x}\right).$$

Ex: 03 X

• la force électrique au pt G



$\vec{F}_G = \vec{F}_{AG} + \vec{F}_{BG} + \vec{F}_{CG}$.

$\vec{F}_{AG} = \frac{kq_A q_G}{AG^2}\vec{u}_{AG}$; $\vec{F}_{BG} = \frac{kq_B q_G}{BG^2}\vec{u}_{BG}$

$\vec{F}_{CG} = k\frac{q_C q_G}{CG^2}\vec{u}_{CG}$. avec $AG^2 = BG^2 = CG^2 = a^2/3$.

$\vec{u}_{AG} = -\vec{\jmath}$; $\vec{u}_{CG} = \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath}$; $\vec{u}_{BG} = -\cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath}$ avec $\theta = 30°$

$\theta = 30° = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = 1/2$. X

$\vec F_{AG} = k\frac{(-2qq')}{a^2/3}\left(\frac{\sqrt3}{2}\vec i + \frac12 \vec j\right)$; $\vec F_{BG} = \frac{k(-qq')}{a^2/3}\left(-\frac{\sqrt3}{2}\vec i + \frac12 \vec j\right)$.

$\vec F_{AG} = -\frac{k2qq'}{a^2/3}(-\vec j)$.

donc $\vec F_G = 3\frac{kqq'}{a^2}\left(-\left(\frac{\sqrt3}{2}\vec i + \frac12\vec j - \frac{\sqrt3}{2}\vec i + \frac12\vec j - 2\vec j\right)\right)$.

$\vec F_G = +3\frac{kqq'}{a^2}\vec j$

• le champ électrique au pt G:

$\vec F_G = q'\vec E_G \Rightarrow \vec E_G = \frac{\vec F_G}{q'}$ donc $\vec E_G = +\frac{3kq}{a^2}\vec j$

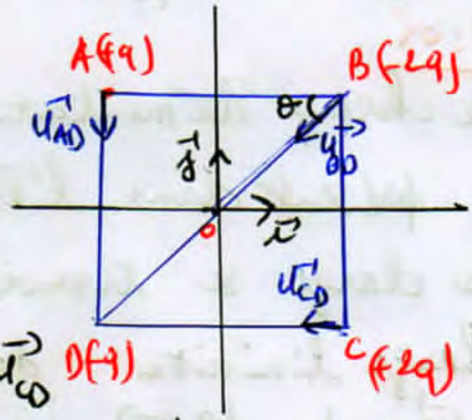
• le potentiel au pt G:

$V_G = V_A + V_B + V_C = k\frac{q_A}{AG} + k\frac{q_B}{BG} + k\frac{q_C}{CG}$.

$V = \frac{k(-2q)}{a/\sqrt3} + \frac{k(-q)}{a/\sqrt3} + \frac{k(-q)}{a/\sqrt3} \Rightarrow V = \sqrt3\frac{kq}{a}(-2-1-1)$.

Ex104

$V_G = -4\sqrt3\frac{kq}{a}$.



• la force électrique au pt D.

$\vec F_D = \vec F_{AD} + \vec F_{BD} + \vec F_{CD}$

$\vec F_{AD} = \frac{kq_Aq_D}{AD^2}\vec u_{AD}$; $\vec F_{BD} = \frac{kq_Bq_D}{BD^2}\vec u_{BD}$; $\vec F_{CD} = \frac{kq_Cq_D}{CD^2}\vec u_{CD}$

$AD = BD = a$ et $BD^2 = 2a^2$; $\vec u_{AD} = -\vec j$; $\vec u_{CD} = -\vec i$.

$\vec u_{BD} = -\cos\theta\,\vec i - \sin\theta\,\vec j$ avec $\theta = \frac{\pi}{4}$ donc $\vec u_{BD} = -\frac{\sqrt2}{2}\vec i - \frac{\sqrt2}{2}\vec j$.

$\vec F_{AD} = \frac{k(-q^2)}{a^2}(-\vec j)$; $\vec F_{CD} = \frac{k(2q^2)}{a^2}(-\vec i)$; $\vec F_{BD} = \frac{k(2q^2)}{2a^2}\left(-\frac{\sqrt2}{2}\vec i - \frac{\sqrt2}{2}\vec j\right)$.

$\vec F_D = \frac{kq^2}{a^2}\left(\vec j + 2\vec i - \frac{\sqrt2}{2}\vec i - \frac{\sqrt2}{2}\vec j\right)$.

$\vec F_D = \frac{kq^2}{a^2}\left[\left(2 - \frac{\sqrt2}{2}\right)\vec i + \left(1 - \frac{\sqrt2}{2}\right)\vec j\right]$.

• le champ électrique au pt O:

$\vec E_O = \vec E_A + \vec E_B + \vec E_C + \vec E_D$.

$\vec E_A = \frac{kq_A}{AO^2}\vec u_{AO}$; $\vec E_B = \frac{kq_B}{BD^2}\vec u_{BO}$; $\vec E_C = \frac{kq_C}{CO^2}\vec u_{CO}$; $\vec E_D = \frac{kq_D}{DO^2}\vec u_{DO}$

$$AO^2 = BO^2 = CO^2 = DO^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}.$$

$$\vec{u}_{AO} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\ ;\ \vec{u}_{BO} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\ ;\ \vec{u}_{CO} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\ ;\ \vec{u}_{DO} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$$

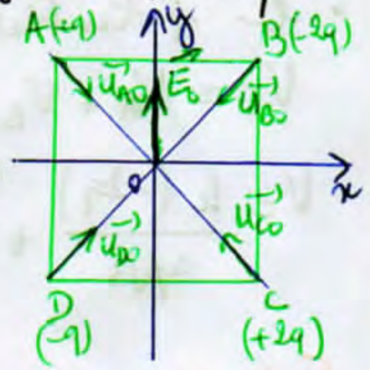
$$\vec{E}_{AO} = k\frac{q}{a^2/2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right)\ ;\ \vec{E}_B = \frac{k(-2q)}{a^2/2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right)\ ;\ \vec{E}_C = \frac{k(2q)}{a^2/2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right)$$

$$\vec{E}_D = k\frac{(-q)}{a^2/2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right).$$

$$\vec{E}_0 = \frac{kq}{a^2}\left((\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} - \sqrt{2})\vec{i} + (-\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - \sqrt{2})\vec{j}\right).$$

$$\vec{E}_0 = 2\sqrt{2}\frac{kq}{a^2}\vec{j}.$$

$\vec{E}_0$ est suivant (oy) dans le sens de $\vec{j}$. et $E_0 = 254{,}6\ V/m$.



• le potentiel au pt O.

$$V_0 = V_A + V_B + V_C + V_D = \frac{kq_A}{AO} + \frac{kq_B}{BO} + \frac{kq_C}{CO} + \frac{kq_D}{DO}$$

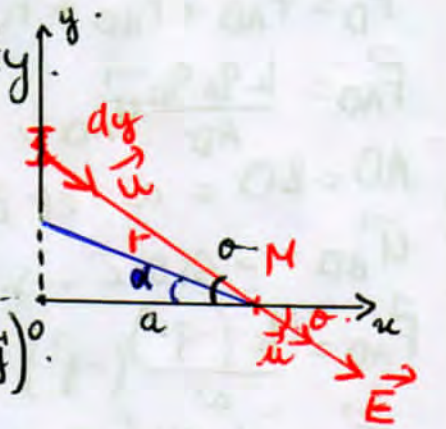
$$= \frac{kq}{a/\sqrt{2}} + \frac{k(-2q)}{a/\sqrt{2}} + \frac{k(2q)}{a/\sqrt{2}} + \frac{k(-q)}{a/\sqrt{2}} \Rightarrow V_0 = 0.$$

Ex: 05

• le champ élémentaire $d\vec{E}$ créé par l'élément de charge linéaire dq présent dans l'élément de longueur dl.

la charge se trouve sur (oy) donc $dl = dy$.

charge linéaire $dq = \lambda dl = \lambda dy$.



$$d\vec{E} = k\frac{dq}{r^2}\vec{u}.$$

$\vec{u} = \cos\theta\,\vec{i} - \sin\theta\,\vec{j}$ et $d\vec{E} = \frac{k\lambda dy}{r^2}(\cos\theta\,\vec{i} - \sin\theta\,\vec{j})$.

$$\begin{cases} dE_x = k\lambda\dfrac{dy}{r^2}\cos\theta. \\ dE_y = -k\dfrac{\lambda dy}{r^2}\sin\theta. \end{cases}$$

nous avons 3 variables r, θ et y. il faut choisir une seule variable.

on écrit y et r en fonction de θ qui varie de α à $\frac{\pi}{2}$.

$\cos\theta = \frac{a}{r} \Rightarrow r = \frac{a}{\cos\theta}$; $tg\,\theta = \frac{y}{a} \Rightarrow y = a\,tg\,\theta$.

$dy = \frac{a}{\cos^2\theta}d\theta$.

$$\begin{cases} dE_x = \dfrac{k\lambda\,.\,a/\cos^2\theta}{a^2/\cos^2\theta}.\cos\theta\,d\theta. \\ dE_y = -k\lambda\dfrac{a/\cos^2\theta}{a^2/\cos^2\theta}.\sin\theta\,d\theta. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} dE_x = \frac{k\lambda}{a} \cos\theta \, d\theta. \\ dE_y = -\frac{k\lambda}{a} \sin\theta \, d\theta. \end{cases}$$

les composantes du champ $\vec{E}$:

$$\begin{cases} E_x = \int_\alpha^{\pi/2} dE_x = \frac{k\lambda}{a} \int_\alpha^{\pi/2} \cos\theta \, d\theta \\ E_y = \int_\alpha^{\pi/2} dE_y = -\frac{k\lambda}{a} \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \, d\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_x = \frac{k\lambda}{a} \sin\theta \Big]_\alpha^{\pi/2} \\ E_y = -\frac{k\lambda}{a} \left(-\cos\theta\right]_\alpha^{\pi/2} \end{cases}$$

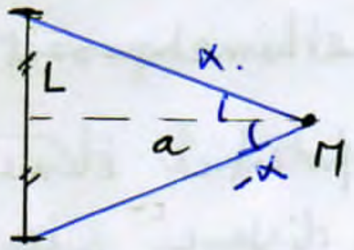
$$\Rightarrow \begin{cases} E_x = \frac{k\lambda}{a}(1-\sin\alpha). \\ E_y = \frac{k\lambda}{a} \cos\alpha. \end{cases}$$

$$\vec{E} = \frac{k\lambda}{a}\left[(1-\sin\alpha)\vec{i} + \cos\alpha \, \vec{j}\right].$$

$$|\vec{E}| = \frac{k\lambda}{a}\sqrt{(1-\sin\alpha)^2 + \cos^2\alpha} = \frac{k\lambda}{a}\sqrt{2(1-\sin\alpha)}$$

E_M pour un fil limité

θ varie de $-\alpha$ à $+\alpha$.



$$\begin{cases} E_x = \frac{k\lambda}{a} \sin\theta \Big]_{-\alpha}^{+\alpha} \\ E_y = \frac{k\lambda}{a} \cos\theta \Big]_{-\alpha}^{+\alpha} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_x = \frac{k\lambda}{a}(\sin\alpha + \sin\alpha). \\ E_y = \frac{k\lambda}{a}(\cos\alpha - \cos\alpha). \end{cases}$$

$$\vec{E} = \frac{2k\lambda}{a} \sin\alpha \, \vec{i} \quad \text{avec} \quad \sin\alpha = \frac{L}{\sqrt{L^2+a^2}}.$$

$$\vec{E} = \frac{2k\lambda}{a} \cdot \frac{L}{\sqrt{L^2+a^2}} \vec{i}.$$

pour un fil infini θ varie de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$.

$$\begin{cases} E_x = \frac{k\lambda}{a} \sin\theta \Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2}. \\ E_y = \frac{k\lambda}{a} \cos\theta \Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_x = \frac{k\lambda}{a}(2\sin\pi/2). \\ E_y = 0 \end{cases}$$

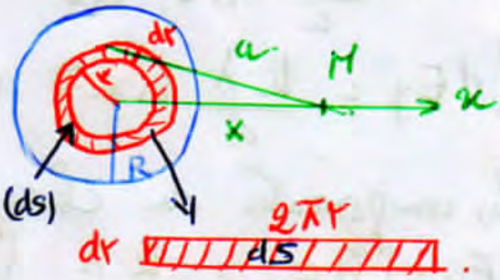
$$\vec{E} = \frac{2k\lambda}{a} \vec{i}.$$

lorsqu'il y a une symétrie par rapport à (Ox) ; le champ électrique $\vec{E}$ est suivant (Ox) et la composante du champ suivant $(Oy) = 0$.

Ex: 05

La charge est répartit sur la surface du disque donc il y a une répartition surfacique des charges (ds)

$dq = \sigma . ds$.



. Le potentiel électrostatique au pt M:

. on cherche l'élément de surface ds.

on suppose qu'on divise le disque en une infinité de petits anneaux de rayon r avec $0 \leq r < R$ et d'épaisseur dr.

si on allonge cet anneau on aura un rectangle de surface $ds = 2\pi r . dr$.

(ou mathématiquement $S_{disque} = \pi r^2 \Rightarrow ds = \frac{\partial S}{\partial r} = 2\pi r\, dr$).

. le potentiel élémentaire $dV = \frac{k\, dq}{a} = \frac{k\, \sigma\, ds}{a}$

a: la distance entre l'élément de charge dq présent dans ds et le pt M

$a = \sqrt{x^2 + r^2}$ avec $dV = \frac{k \sigma\, 2\pi r\, dr}{\sqrt{x^2 + r^2}}$.

donc $V = k\sigma\pi \int_0^R \frac{2r\, dr}{\sqrt{x^2+r^2}} = k \sigma \pi \left. 2\sqrt{x^2+r^2} \right]_0^R$ avec $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{x^2+R^2} - |x|\right)$.

pour $x > 0$: $V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{x^2+R^2} - x\right)$.

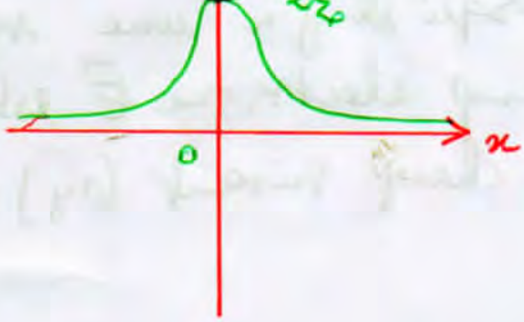
pour $x < 0$: $V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{x^2+R^2} + x\right)$.

la représentation de V(X)

pour $x > 0$
$x \to +\infty$ $V(x) \to 0$.

$x < 0$
$x \to -\infty$ $V(x) \to 0$.

$x \to 0$ $V(x) \to \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}$.



2. L'intensité du champ électrique au pt M :

le champ électrique a une seule composante suivant (ox) à cause de la symétrie du disque suivant (ox).
donc $E_y = 0$ et $\vec{E} = E_x \vec{i}$.

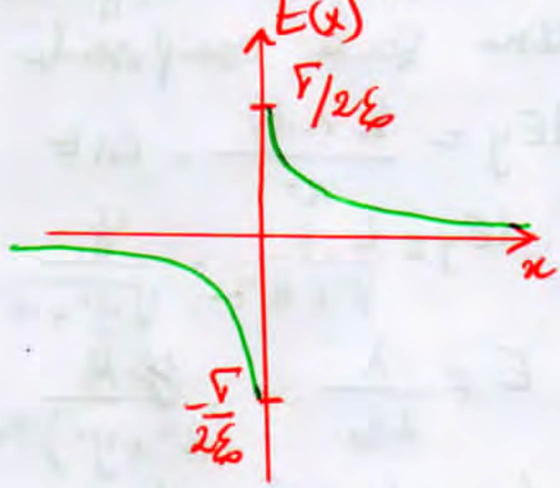
$\Rightarrow \vec{E} = -\vec{grad} V = -\frac{\partial V}{\partial x} \vec{i}$ donc $E = -\frac{dV}{dx}$.

$$E = \begin{cases} x>0 & E = -\sigma/2\varepsilon_0 \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}} - 1 \right) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+R^2}} + 1 \right) \\ x<0 & E = -\sigma/2\varepsilon_0 \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}} + 1 \right) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+R^2}} - 1 \right) \end{cases}$$

. Représentation de E(x).

$x \to 0^+$ $E_x = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ et $x \to 0^-$ $E_x = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}$.

$x \to +\infty$ $E_x \to 0$ et $x \to -\infty$ $E \to 0$.



3. le champ électrique pour $R \to \infty$.

$$\underset{R\to\infty}{E} \begin{cases} x>0 & E = \sigma/2\varepsilon_0 \\ x<0 & E = -\sigma/2\varepsilon_0 \end{cases}$$

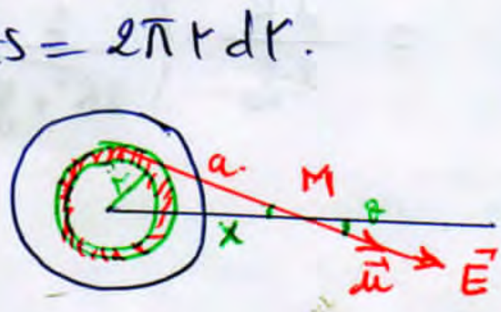
(c'est le champ électrique d'1 plan infini).

4. le champ électrique par la méthode directe :

le champ élémentaire $d\vec{E}$ crée par l'élément de charge dq présent dans l'élément de surface ds.

$d\vec{E} = \frac{k\, dq}{a^2} \vec{u}$ avec $dq = \sigma . ds$ et $ds = 2\pi r\, dr$.

$\vec{u} = \cos\theta\, \vec{i} - \sin\theta\, \vec{j}$.



A cause de la symétrie suivant (ox) le champ électrique a une seule composant suivant (ox).

$d\vec{E} = k \frac{\sigma . 2\pi r\, dr}{a^2} . \cos\theta\, \vec{i}$ avec $a^2 = x^2 + r^2$ et $\cos\theta = \frac{x}{a} = \frac{x}{\sqrt{x^2+r^2}}$

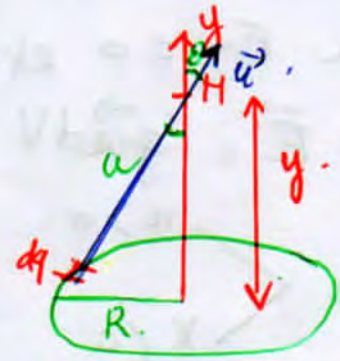
$\Rightarrow dE_x = k . \frac{\sigma . 2\pi r\, dr}{x^2 + r^2} . \frac{x}{\sqrt{x^2+r^2}}$.

donc $E_x = k\sigma . 2\pi . x \int_0^R \frac{2r}{(x^2+r^2)^{3/2}} dr = k\,\sigma\pi x . \left(\frac{-2}{\sqrt{x^2+r^2}}\right)_0^R$

$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

$E_x = \begin{cases} x>0 & E = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+r^2}} - 1\right) \\ x<0 & E = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+r^2}} + 1\right) \end{cases}$

Ex:06



. le champ élémentaire créé par l'élément de charge dq présent dans l'élément dl.

$d\vec{E} = \frac{k\,dq}{a^2} . \vec{u} \qquad dq = \lambda dl.$

à cause de la symétrie suivant (oy) ; le champ électrique a une seule composante suivant (oy) : ($E_x = 0$ et $\vec{E} = E_y \vec{j}$).

$dE_y = \frac{k\lambda dl}{a^2} . \cos\theta$ avec $a^2 = y^2 + R^2$ et $\cos\theta = \frac{y}{a} = \frac{y}{\sqrt{y^2+R^2}}$

$dE_y = \frac{k\lambda}{y^2+R^2} . \frac{y}{\sqrt{y^2+R^2}} . dl \Rightarrow E_y = \frac{k\lambda y}{(y^2+R^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi R} dl.$

$E = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0} . \frac{\cancel{y}R}{(R^2+y^2)^{3/2}}.$

. le potentiel électrique au pt M:

$\vec{E} = -\vec{\text{grad}}\,V = -\frac{\partial V}{\partial y}\vec{j}.$

donc $E = -\frac{dV}{dy} \Rightarrow E dy = -dV$

$\Rightarrow V = -\int E . dy = -\frac{\lambda R}{2\varepsilon_0} . \frac{1}{2}\int \frac{2y}{(R^2+y^2)^{3/2}} . dy.$

$= \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+y^2}}\right).$