Exercice 1 :

1. On considère la fonction

$$\begin{array}{rcl} f:[0,2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & f(x)=x^2 \end{array}$$

   et la subdivision $\Delta_n : 0 < 2/n < 4/n < \ldots < 2$. Évaluer la différence $S_{\Delta_n} - s_{\Delta_n}$ des sommes de Darboux, puis montrer à l'aide du critère d'intégrabilité que cette fonction est Riemann-intégrable.

2. On se donne à présent une fonction g définie sur $f([0,2])$, monotone et vérifiant

$$\exists \lambda > 0 \; \forall u, v \in f([0,2]) \quad |g(u) - g(v)| \leq \lambda |u - v| \quad \text{(lipschitzienne)}$$

   Montrer, en suivant les étapes de la première question, que $g \circ f$ est aussi Riemann-intégrable.

Exercice 2 : Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \frac{3x-1}{(x+1)^2}\, dx \quad , \quad \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+4x+7}\, dx \quad , \quad \int_0^{\pi/2} x \sin x \, dx \quad , \quad \int_{-1}^1 (\arccos x)^2 \, dx$$

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\, dx \quad , \quad \int_1^2 x^2 \ln x \, dx$$

Exercice 3 : En interprétant les suites suivantes comme des sommes de Riemann, calculer leurs limites :

$$u_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{n+k} \quad , \quad w_n = \left(\frac{(2n)!}{n! n^n} \right)^{1/n} \quad , \quad \theta_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{\sqrt{4n^2 - k^2}}$$

Indication : pour la deuxième, passer d'abord à $\ln w_n$.

Exercice 4 : Montrer que si f est une fonction continue sur $[0,1]$ et telle que $\int_0^1 f(x)\, dx = 0$, alors $\exists c \in [0,1]$ tel que $f(c) = 0$. Trouver un contre-exemple à ce résultat si on laisse tomber l'hypothèse de continuité. En déduire que si une fonction g est continue sur $[0,1]$ avec $\int_0^1 g(x)\, dx = 1/2$, alors $\exists d \in [0,1]$ tel que $g(d) = d$.

Exercice 5 : Soit $f : [a,b] \longrightarrow [c,d]$ continûment dérivable, strictement croissante et bijective. Calculer la valeur de $\int_a^b f(t)\, dt + \int_c^d f^{-1}(u)\, du$.

Exercice 6 : Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que la fonction définie par :

$$g(x) = x \int_a^x (1-t) f(t)\, dt + (1-x) \int_x^b t f(t)\, dt$$

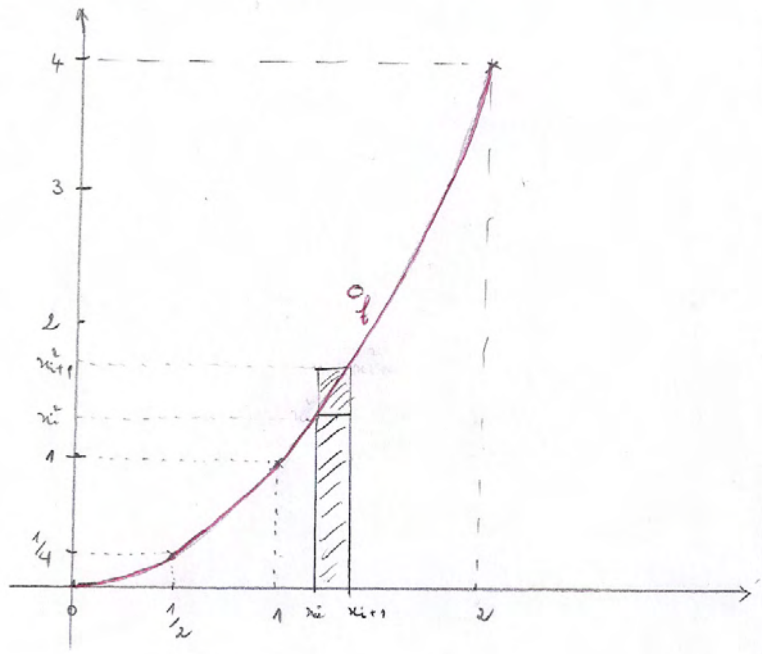
est de classe C^2 et que $g'' = f$.

ANALYSE II

T-D n°2.

Exercice 1 :

1)



$\Delta_n = \left\{0, \frac{2}{n}, \frac{4}{n}, \dots, \frac{2n}{n}\right\} = \left\{0, \frac{\cdot}{n}, 2\cdot\frac{\cdot}{n}, \dots, \cdot\right\}$

$(n+1)$ éléments donc n intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ avec $x_i = \frac{2i}{n}$ et $i \in \{0,1,\dots,n-1\}$

$\forall i \in \{0,1,\dots,n-1\},\ x_{i+1} - x_i = \frac{2i+2}{n} - \frac{2i}{n} = \frac{2}{n}$

$$S_{\Delta_n} = \sum_{i=0}^{n-1} M_i (x_{i+1} - x_i) \quad \text{avec } M_i = \sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x) = x_{i+1}^2 = \left(\frac{2(i+1)}{n}\right)^2 = \frac{4(i+1)^2}{n^2}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} M_i \frac{2}{n} = \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} M_i = \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \frac{4(i+1)^2}{n^2} = \frac{8}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)^2$$

$$s_{\Delta_n} = \sum_{i=0}^{n-1} m_i (x_{i+1} - x_i) \quad \text{avec } m_i = \inf_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x) = x_i^2 = \frac{4i^2}{n^2}$$

$$= \cdot - \qquad = \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{4i^2}{n^2} = \frac{8}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1} i^2$$

$$S_{\Delta_n} - s_{\Delta_n} = \frac{8}{n^3}\left(\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)^2 - \sum_{i=0}^{n-1} i^2\right)$$

$$= \frac{8}{n^3}\left(1^2 + 2^2 + \dots + n^2 - 0^2 - 1^2 - \dots - (n-1)^2\right)$$

$$= \frac{8n^2}{n^3} = \underline{\underline{\frac{8}{n}}}$$

f est Riemann-intégrable $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \Delta_\varepsilon, S_{\Delta_\varepsilon} - s_{\Delta_\varepsilon} \leq \varepsilon$.

Or $S_{\Delta_n} - s_{\Delta_n} = \frac{8}{n}$ et, $\forall \varepsilon > 0$ $\frac{8}{n} \leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{n}{8} \geq \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n \geq \frac{8}{\varepsilon}$

Il suffit de choisir $n \geq \left[\frac{8}{\varepsilon}\right] + 1$ pour avoir :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \Delta_\varepsilon, \quad S_{\Delta_\varepsilon} - s_{\Delta_\varepsilon} \leq \varepsilon$.

$\Delta_\varepsilon = \Delta_n$ avec $n \geq \left[\frac{8}{\varepsilon}\right] + 1$

Par suite f est Riemann-intégrable.

2) Soit $g : f([0,2]) \longrightarrow \mathbb{R}$ c-à-d. $g : [0,4] \longrightarrow \mathbb{R}$, monotone et vérifiant : $\exists \lambda > 0, \forall u, v \in [0,4], \ |g(u) - g(v)| \leq \lambda |u - v|$.

Montrons que $g \circ f$ est aussi Riemann-intégrable.

Reprenons la même subdivision qu'en 1) : $\Delta_n = \left\{0, \frac{2}{n}, \frac{4}{n}, \dots, n\frac{2}{n}\right\}$

$S_{\Delta_n} = \sum_{i=0}^{n-1} M_i (x_{i+1} - x_i)$ avec $M_i = \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} g \circ f(x)$ $\quad x_i = \frac{2i}{n}$ $\quad i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

$x_{i+1} - x_i = \frac{2}{n}$

$s_{\Delta_n} = \sum_{i=0}^{n-1} m_i (x_{i+1} - x_i)$ avec $m_i = \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} g \circ f(x)$.

$\forall x \in]x_i, x_{i+1}[, \ x_i < x < x_{i+1} \Rightarrow \forall x \in]x_i, x_{i+1}[, \ f(x_i) < f(x) < f(x_{i+1})$

$$\Rightarrow \begin{cases} \forall x \in]x_i, x_{i+1}[, \ g(f(x_i)) < g(f(x)) < g(f(x_{i+1})) & \text{si } g \text{ est croissante} \\ \forall x \in]x_i, x_{i+1}[, \ g(f(x_i)) > g(f(x)) > g(f(x_{i+1})) & \text{si } g \text{ est décroissante} \end{cases}$$

Donc g croissante $\Rightarrow \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} g \circ f(x) = g \circ f(x_i)$ et $\sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} g \circ f(x) = g \circ f(x_{i+1})$

g décroissante $\Rightarrow \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} g \circ f(x) = g \circ f(x_{i+1})$ et $\sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} g \circ f(x) = g \circ f(x_i)$

Donc $S_{\Delta_n} = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} M_i = \begin{cases} \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} g \circ f(x_{i+1}) & \text{si } g \text{ est croissante} \\ \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} g \circ f(x_i) & \text{si } g \text{ est décroissante} \end{cases}$

et $s_{\Delta_n} = \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} m_i = \begin{cases} \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} gof(x_i) & \text{si } g \text{ est croissante} \\ \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} gof(x_{i+1}) & \text{si } g \text{ est décroissante} \end{cases}$

Par suite $S_{\Delta_n} - s_{\Delta_n} = \begin{cases} \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} gof(x_{i+1}) - gof(x_i) & \text{si } g \text{ est croissante} \\ \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} gof(x_i) - gof(x_{i+1}) & \text{si } g \text{ est décroissante} \end{cases}$

$$= \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \left| gof(x_{i+1}) - gof(x_i) \right|$$

$$\frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \left| g(f(x_{i+1})) - g(f(x_i)) \right|$$

g λ-lipschitzienne $\Rightarrow$ $$\leq \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \lambda \left| f(x_{i+1}) - f(x_i) \right|$$

$$= \frac{2\lambda}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \left| f(x_{i+1}) - f(x_i) \right|$$

$$= \frac{2\lambda}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \left(f(x_{i+1}) - f(x_i) \right)$$

$$= \frac{2\lambda}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \left(\left(\frac{2(i+1)}{n}\right)^2 - \left(\frac{2i}{n}\right)^2 \right)$$

$$= \frac{2\lambda}{n^3} \times 4 \sum_{i=0}^{n-1} \left[(i+1)^2 - i^2 \right)$$

$$= \frac{8\lambda}{n^3} n^2 = \frac{8\lambda}{n}$$

gof Riemann-intégrable $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \Delta_\varepsilon / \ S_{\Delta_\varepsilon} - s_{\Delta_\varepsilon} < \varepsilon$

Or $S_{\Delta_n} - s_{\Delta_n} = \frac{8\lambda}{n}$ et $\forall \varepsilon > 0$, $\frac{8\lambda}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{n}{8\lambda} \geq \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n \geq \frac{8\lambda}{\varepsilon}$

Il suffit de choisir $n \geq \left[\frac{8\lambda}{\varepsilon}\right] + 1$ pour avoir :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \underset{\underset{\Delta_n \text{ avec } n \geq \left[\frac{8\lambda}{\varepsilon}\right]+1}{\shortparallel}}{\Delta_\varepsilon} / \ S_{\Delta_\varepsilon} - s_{\Delta_\varepsilon} < \varepsilon$. Donc gof est Riemann-intégrable

Exercice 2 :

a) $I_1 = \int_0^1 \frac{3x-1}{(x+1)^2}\,dx$

Décomposition en éléments simples :

$$\frac{3x-1}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{Ax+A+B}{(x+1)^2}$$

Par identification : $\begin{cases} A = 3 \\ A+B = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 3 \\ B = -1-A = -4 \end{cases}$

$$\int_0^1 \frac{3x-1}{(x+1)^2}\,dx = \int_0^1 \frac{3}{x+1}\,dx - 4\int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}\,dx$$

$$= \left[3\ln(x+1)\right]_0^1 + 4\left[\frac{1}{x+1}\right]_0^1$$

$$= 3\ln 2 + 4\left(\frac{1}{2}-1\right)$$

$$= 3\ln 2 - 2$$

b) $I_2 = \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+4x+7}\,dx$

$x^2+4x+7 = x^2+4x+4+3$

$= (x+2)^2+3 \quad = 3\left[\left(\frac{x+2}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right]$

$$I_2 = \int_{-1}^1 \frac{1}{(x+2)^2+3}\,dx = \frac{1}{3}\int_{-1}^1 \frac{dx}{\left(\frac{x+2}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$

Posons $X = \frac{x+2}{\sqrt{3}}$ $\quad dX = \frac{dx}{\sqrt{3}}$ soit $dx = \sqrt{3}\,dX$

$x = -1 \Rightarrow X = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\quad x = 1 \Rightarrow X = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

$$I_2 = \frac{1}{3}\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}\,dX}{X^2+1}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dX}{X^2+1}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\Big[\operatorname{Arctan} X\Big]_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\operatorname{Arctan}\sqrt{3} - \operatorname{Arctan}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{2\pi-\pi}{6}\right)$$

$$= \boxed{\frac{\pi\sqrt{3}}{18}}$$

c) $I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx$

<u>Intégration par parties.</u>

$u = x \qquad du = dx$

$dv = \sin x\, dx \qquad v = -\cos x$

$$I_3 = \Big[uv\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} v\,du$$

$$= \underbrace{\Big[-x\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$$

$$= \Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 1$$

$$I_4 = \int_{-1}^{1} (\arccos x)^2 dx.$$

<u>1ère méthode :</u> Intégration par parties.

Posons : $u_1 = (\arccos x)^2$ $\quad du_1 = -\dfrac{2\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$

$dv_1 = dx \quad v_1 = x$

$$I_4 = \left[x(\arccos x)^2\right]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} \frac{2x\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \left((\arccos 1)^2 + (\arccos(-1))^2\right) + 2\int_{-1}^{1} \frac{x\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \left(0 + \pi^2\right) + 2\int_{-1}^{1} \frac{x\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \pi^2 + 2J \quad \text{avec } J = \int_{-1}^{1} \frac{x\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Posons : $u_2 = \arccos x$ $\quad du_2 = \dfrac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$dv_2 = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}$ d'où $v_2 = -\sqrt{1-x^2}$

Donc $J = \underbrace{\left[-(\arccos x)\sqrt{1-x^2}\right]_{-1}^{1}}_{=0} - \displaystyle\int_{-1}^{1} dx$

$= -[x]_{-1}^{1}$

$= -(1+1) = -2$

Finalement : $I_4 = \pi^2$

$= \pi^2 - 4$

<u>2ème méthode :</u> Changement de variables.

Posons $t = \arccos x$. Par suite $\cos t = x$ et $dx = -(\sin t)\, dt$

$x = -1 \Rightarrow t = \pi$ et $x = 1 \Rightarrow t = 0$

$$I_4 = \int_{\pi}^{0} t^2(-\sin t)\,dt = \int_0^{\pi} t^2 \sin t\, dt.$$

Posons $u_1 = t^2$ $\quad du_1 = 2t\,dt$

$dv_1 = \sin t\, dt$ $\quad v_1 = -\cos t$

$$I_4 = \left[-t^2\cos t\right]_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi} t\cos t\, dt$$

$$= \pi^2 + 2\int_0^{\pi} t\cos t\, dt$$

$$= \pi^2 + 2J \quad \text{avec } J = \int_0^{\pi} t\cos t\, dt$$

Posons $u_2 = t$ $\quad du_2 = dt$

$dv_2 = \cos t\, dt$ $\quad v_2 = \sin t$

$$J = \underbrace{\left[t\sin t\right]_0^{\pi}}_{0} - \int_0^{\pi} \sin t\, dt$$

$$= \left[\cos t\right]_0^{\pi}$$

$$= -1 - 1 = -2$$

Donc $\quad I_4 = \pi^2 + 2J = \pi^2 - 4.$

$$I_5 = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$$

<u>1ère méthode</u>

$$I_5 = \int_0^1 \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} - \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx$$

$$= \left[\arctan x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx$$

$$= \arctan 1 - \arctan 0 - \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx$$

$$= \frac{\pi}{4} - J \quad \text{avec } J = \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx$$

$$J = \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx$$

$$= \int_0^1 x \cdot \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx.$$

Faisons une intégration par parties

$u = x \qquad du = dx$

$$dv = \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2x}{(1+x^2)^2}\,dx \qquad \text{donc} \quad v = -\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}$$

$$J = \left[-\frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \left[-\frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\arctan x\right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

Finalement : $I_5 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$

$$= \frac{\pi+2}{8}$$

2ème méthode : changement de variable

Posons $x = \tan\theta$ ou plutôt $\theta = \arctan x$

$0 < x < 1 \implies 0 < \theta < \frac{\pi}{4}$

$dx = (1+\tan^2\theta)\,d\theta$

$$I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\tan^2\theta}{(1+\tan^2\theta)^2}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta\,d\theta$$

Or $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$= 2\cos^2\theta - 1$ d'où $\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$

Ainsi : $I_5 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta$

$= \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 2\theta)\, d\theta$

$= \dfrac{1}{2} \left[\theta + \dfrac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi+2}{8}$

$I_6 = \displaystyle\int_1^2 x^2 \ln x\, dx$

Intégration par parties :

$u = \ln x$ $\quad du = \dfrac{1}{x}\, dx$

$dv = x^2 dx$ $\quad v = \dfrac{x^3}{3}$.

$I_6 = \left[\dfrac{x^3}{3}\ln x\right]_1^2 - \displaystyle\int_1^2 \frac{x^2}{3}\, dx$

$= \left[\dfrac{x^3}{3}\ln x - \dfrac{x^3}{3^2}\right]_1^2$

$= \dfrac{8}{3}\ln 2 - \dfrac{8}{9} + \dfrac{1}{9}$

$= \dfrac{8}{3}\ln 2 - \dfrac{7}{9}$

Exercice 3 : a) $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{n+k}$

$k = n \Rightarrow k - n = 0$

Posons $i = k - n$ c.à.d $k = i + n$

$$u_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{n+k}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n+i+n}$$

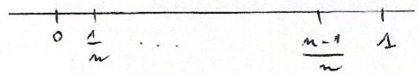
$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2n+i}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n\left(2+\frac{i}{n}\right)}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2+\frac{i}{n}}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right)$$ avec $f(x) = \frac{1}{2+x}$. f intégrable sur $[0,1]$ car continue sur $[0,1]$

Par suite $$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right)$$



$$= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right) \underbrace{\frac{1}{n}}_{x_{i+1}-x_i}$$

$$= \int_0^1 f(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2+x}\,dx$$

$$= \left[\ln(2+x)\right]_0^1$$

$$= \ln 3 - \ln 2 = \ln\frac{3}{2}$$

b) $$w_n = \left(\frac{(2n)!}{n!\,n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\ln w_n = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{(2n)!}{n!\,n^n}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left[\ln(2n)! - \ln(n!\,n^n)\right]$$

$$\ln W_n = \frac{1}{n}\left[\ln(\underbrace{2\times 3\times\ldots\times n}_{n!}\times(n-1)\times\ldots\times 2n) - \ln(n!) - \ln n^n\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left[\cancel{\ln(n!)} + \ln(n+1) + \ln(n+2) + \ldots + \ln(2n) - \cancel{\ln(n!)} - n\ln n\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left[\ln(n+1) + \ln(n+2) + \ldots + \ln(n+n) - n\ln n\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left[\underbrace{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) + \ln\left(n\left(1+\frac{2}{n}\right)\right) + \ldots + \ln\left(n\left(1+\frac{n}{n}\right)\right)}_{n \text{ termes}} - n\ln n\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left[\underbrace{\ln n}_{1} + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \underbrace{\ln n}_{1} + \ln\left(1+\frac{2}{n}\right) + \ldots + \underbrace{\ln n}_{1} + \ln\left(1+\frac{n}{n}\right) - n\ln n\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left[\cancel{n\ln n} + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1+\frac{2}{n}\right) + \ldots + \ln\left(1+\frac{n}{n}\right) - \cancel{n\ln n}\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1+\frac{2}{n}\right) + \ldots + \ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right) + \ln 2\right)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right) + \frac{\ln 2}{n}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right) + \frac{\ln 2}{n} \quad \text{avec } f(x) = \ln(1+x).$$

f est continue sur $[0,1]$, donc f est intégrable sur $[0,1]$.

Par suite : $$\lim_{n\to+\infty}\ln W_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right) + \underbrace{\frac{\ln 2}{n}}_{\downarrow 0}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right)$$

$$= \int_0^1 f(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 \ln(1+x)\,dx.$$

<u>Intégration par parties</u>

Posons $u(x) = \ln(1+x)$ et $v'(x) = 1$

Donc $u'(x) = \frac{1}{1+x}$ et $v(x) = x$

$$\int_0^1 \ln(1+x)\,dx = \left[x\ln(1+x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x}\,dx$$

$$= \ln 2 - \int_0^1 \frac{x+1-1}{x+1}\,dx$$

$$\int_0^1 \ln(1+x)\,dx = \ln 2 - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx$$

$$= \ln 2 - \left[x - \ln(1+x)\right]_0^1$$

$$= \ln 2 - 1 + \ln 2$$

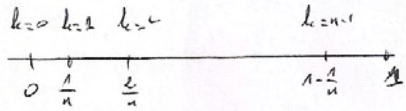
$$= 2\ln 2 - 1$$

$$\lim_{n \to +\infty} W_n = \lim_{n \to +\infty} e^{\ln W_n} = e^{2\ln 2 - 1} = e^{\ln 2^2 - 1} = e^{\ln 4} \cdot e^{-1} = \underline{\underline{\frac{4}{e}}}$$

c) $$\theta_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{\sqrt{4n^2 - k^2}}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n\sqrt{4 - \frac{k^2}{n^2}}}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\frac{k}{n}}{\sqrt{4 - \left(\frac{k}{n}\right)^2}}$$



$$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad \text{avec} \quad f(x) = \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

f continue sur $[0,1]$, donc intégrable sur $[0,1]$

Par suite $$\lim_{n \to +\infty} \theta_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$= \int_0^1 f(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}\,dx$$

$$= -\int_0^1 \frac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2}}\,dx = -\left[\sqrt{4 - x^2}\right]_0^1 = -\sqrt{3} + 2$$

$$= \underline{\underline{2 - \sqrt{3}}}$$

Exercice 4 :

a) f continue sur $[0,1]$ et $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$.

Montrons que : $\exists c \in [0,1]$, $f(c) = 0$.

Faisons un raisonnement par l'absurde.

Supposons que : $\forall c \in [0,1]$, $f(c) \neq 0$.

Dans ce cas, f continue $\Rightarrow \begin{cases} \forall c \in [0,1], f(c) > 0 \\ \text{ou} \\ \forall c \in [0,1], f(c) < 0 \end{cases}$

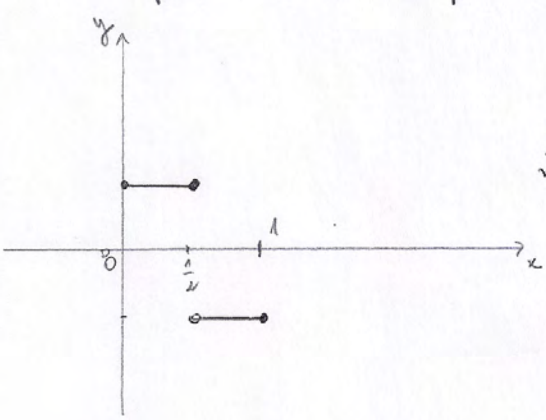
$$\Rightarrow \begin{cases} \int_0^1 f(x)\,dx > 0 \\ \text{ou} \\ \int_0^1 f(x)\,dx < 0 \end{cases} \Rightarrow \int_0^1 f(x)\,dx \neq 0 \quad \text{absurde}$$

car $\int_0^1 f(x)dx = 0$ par hyp.

Donc $\exists c \in [0,1]$, $f(c) = 0$.

b) Donnons un contre-exemple à ce résultat si on supprime l'hypothèse de continuité.

Il suffit de choisir par exemple. $f : [0,1] \to \mathbb{R}$
$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ -1 & \text{si } x \in]\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$



$\lim\limits_{\substack{x \to \frac{1}{2} \\ >}} f(x) = -1 \neq 1 = \lim\limits_{\substack{x \to \frac{1}{2} \\ <}} f(x)$ donc f n'est pas continue en $\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)\,dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\,dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 -\,dx \\ &= [x]_0^{\frac{1}{2}} - [x]_{\frac{1}{2}}^1 \\ &= \frac{1}{2} - \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 0. \end{aligned}$$

f non continue sur $[0,1]$, $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$ et $\forall c \in [0,1]$, $f(c) \neq 0$.

c) g continue sur $[0,1]$

$$\int_0^1 g(x)\,dx = \frac{1}{2}.$$

Montrons que : $\exists\, d \in [0,1],\ g(d) = d.$

c.à.d. $\exists\, d \in [0,1],\ g(d) - d = 0.$

Posons $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x) = g(x) - x.$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (g(x) - x)\,dx = \int_0^1 g(x)\,dx - \int_0^1 x\,dx$$

$$= \frac{1}{2} - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

$$= 0.$$

$$\left.\begin{array}{l} g \text{ continue sur } [0,1] \\ x \mapsto x \quad \text{continue sur } [0,1] \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ continue sur } [0,1]$$

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ continue sur } [0,1] \\ \int_0^1 f(x)\,dx = 0 \end{array}\right\} \underset{a)}{\Longrightarrow} \exists\, d \in [0,1],\ f(d) = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists\, d \in [0,1],\ g(d) - d = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists\, d \in [0,1],\ g(d) = d.$$

Exercice 5 : $f : [a,b] \longrightarrow [c,d]$ continûment dérivable,

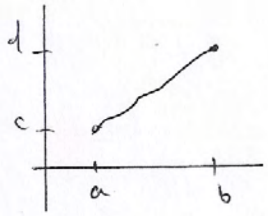
strictement croissante

bijective.

Calculons $\int_a^b f(t)\,dt + \int_c^d f^{-1}(u)\,du$

$f : [a,b] \longrightarrow [c,d]$ bijective. Donc f^{-1} existe et $f^{-1} : [c,d] \to [a,b]$

Il est clair que $f(a) = c$ et $f(b) = d$.



En effet :

Montrons que $f(a) = c$.

Faisons un raisonnement par l'absurde :

Supposons $f(a) \neq c$.

f bijective donc $\exists! x_1 \in]a,b]$, $f(x_1) = c$

$a < x_1 \Rightarrow f(a) < f(x_1) \Rightarrow f(a) < c$ absurde car $f(a) \in [c,d]$.

$\uparrow$ f strictement croissante

Donc $f(a) = c$.

On montre que $f(b) = d$ d'une manière analogue.

$$[a,b] \xrightarrow{f} [c,d] \xrightarrow{f^{-1}} [a,b]$$
$$t \longmapsto f(t) \longmapsto f^{-1}(f(t)) = t$$

Calculons $I = \int_a^b f(t)\,dt + \int_c^d f^{-1}(u)\,du$.

Posons $u = f(t)$. $u = c \Rightarrow t = a$ et $u = d \Rightarrow t = b$.

$du = f'(t)\,dt$

$$I = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b f^{-1}(f(t))\,f'(t)\,dt$$

$$= \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b t\,f'(t)\,dt$$

$$I = \int_a^b \left(f(t) + t f'(t)\right) dt$$
$$= \left[t f(t)\right]_a^b$$
$$= b f(b) - a f(a)$$
$$= bd - ac$$

Exercice 6 : $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonction continue

$$g : [a,b] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto g(x) = x \int_a^x (1-t) f(t)\, dt + (1-x) \int_x^b t\, f(t)\, dt$$

Montrons que g est de classe C^2 et que $g'' = f$

Posons, $\forall x \in [a,b]$, $h_1(x) = x$, $h_2(x) = (1-x)$, $G_1(x) = \int_a^x (1-t) f(t)\, dt$ et $G_2(x) = \int_x^b t f(t)\, dt = \int_b^x (-t f(t))\, dt$

$\forall x \in [a,b]$, $h_1'(x) = 1$, $h_2'(x) = -1$ et $h_1''(x) = h_2''(x) = 0$.

Il en résulte que h_1 et h_2 sont de classe C^2 sur $[a,b]$

h_1, h_2 et f sont continues sur $[a,b]$ $\Rightarrow$ $h_1 f$ et $h_2 f$ sont continues sur $[a,b]$

$$\underset{\text{Th}(*)}{\Longrightarrow} \begin{cases} G_1 \text{ et } G_2 \text{ continues, dérivables sur } [a,b] \\ \text{et} \\ \forall x \in [a,b],\ G_1'(x) = (1-x) f(x) \text{ et } G_2'(x) = -x f(x) \\ \quad (= h_2(x) f(x)) \qquad\qquad (= -h_1(x) f(x)) \end{cases}$$

Donc $G_1' = h_2 f$ et $G_2' = -h_1 f$ sont continues sur $[a,b]$ (puisque h_1, h_2 et f sont continues)

Par suite G_1 et G_2 sont de classe C^1 sur $[a,b]$.

Or $g = h_1 G_1 + h_2 G_2$

Donc : $\left[h_1, h_2, G_1 \text{ et } G_2 \text{ de classe } C^1 \text{ sur } [a,b] \Rightarrow g \text{ de classe } C^1 \text{ sur } [a,b]\right]$

Par conséquent : $g' = h_1' G_1 + h_1 G_1' + h_2' G_2 + h_2 G_2'$

c-à-d : $\forall x \in [a,b]$, $g'(x) = h_1'(x) G_1(x) + h_1(x) G_1'(x) + h_2'(x) G_2(x) + h_2(x) G_2'(x)$

(*) Théorème : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $F : [a,b] \to \mathbb{R}$
$$x \mapsto F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

Alors F est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $[a,b]$ et $\forall x \in [a,b]$, $F'(x) = f(x)$, c-à-d F est une primitive de f.

$\forall x \in [a,b]$, $g'(x) = \int_a^x (1-t) f(t)\,dt + x\cancel{(1-x)} f(x) - \int_x^b t f(t)\,dt - \cancel{(1-x)x} f(x)$

$$= \int_a^x (1-t) f(t)\,dt - \int_x^b t f(t)\,dt$$

$$= G_1(x) - G_2(x)$$

G_1 et G_2 sont de classe C^1 sur $[a,b] \Rightarrow g'$ de classe C^1 sur $[a,b]$

$\Leftrightarrow$ g de classe C^2 sur $[a,b]$ et $g''(x) = G_1'(x) - G_2'(x)$

$$= (1-x) f(x) + x f(x)$$

$$= f(x)$$

<u>Conclusion</u> g de classe C^2 et $g'' = f$.