Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen	A.U 2018/2019 - M.I 1ère année
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 2 - Fiche de T.D n°1

Exercice 1 : En utilisant les polynômes de Taylor, après avoir justifié leur usage, écrire le développement limité de chacune des fonctions suivantes aux points et ordres repectifs :

$$f(x) = \sqrt{1+x^2} \quad , \quad a = 0 \quad , \quad n = 4$$
$$g(x) = \sin(2\pi x) \quad , \quad a = 1/3 \quad , \quad n = 3$$
$$h(x) = \arctan x \quad , \quad a = 1 \quad , \quad n = 2.$$

Exercice 2 : A partir des développements limités usuels, trouver les développements des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = e^x\sqrt{1+x}\ ,\ DL_5(0) \bullet f_2(x) = \frac{1-\sinh x}{1+\cosh x}\ ,\ DL_4(0) \bullet f_3(x) = \sin(\ln(1+x))\ ,\ DL_3(0).$$

Exercice 3 : On considère la fonction $f(x) = e^{x^2} - \dfrac{1+ax^2}{1+bx^2}$ où a et b sont deux paramètres réels. Trouver les valeurs de a et b de sorte que le développement limité de f au voisinage de 0 commence par la plus grande puissance de x possible.

Exercice 4 : Étudier la fonction réelle $\varphi(t) = (2t-1)e^t + 1$, puis montrer qu'elle est strictement positive sur $\mathbb{R}$. On considère ensuite la fonction $f(x) = \dfrac{e^{x^2}-1}{x}$ si $x \neq 0$, et $f(0) = 0$. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, puis que f^{-1} est de classe au moins C^3. Enfin, à partir du $\mathrm{DL}_3(0)$ de f, déduire le $\mathrm{DL}_3(0)$ de f^{-1}.

Exercice 5 : En utilisant les développements limités, calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+\ln(1+x)-e^x}{1-\cos x} \quad , \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}$$

où a, b sont deux paramètres strictement positifs.

Exercice 6 :

1. A l'aide d'un DL déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse $x = 0$ à la courbe représentative de la fonction $f(x) = \ln\left(x^2+2x+2\right)$ ainsi que la position de la courbe par rapport à cette tangente..
2. A l'aide d'un développement asymptotique au voisinage de $\pm\infty$, déterminer les équations des asymptotes éventuelles à la courbe d'équation
$$y = \frac{x+1}{1+e^{1/x}}$$
ainsi que la position de cette courbe par rapport à ces asymptotes.

T.D n° 1

Exercice 1 :

a) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ $\quad a = 0 \quad n = 4.$

$f(x) = (1+x^2)^{1/2}$ $\qquad f(0) = 1$

$f'(x) = \frac{1}{2} 2x (1+x^2)^{1/2 - 1} = x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$ $\qquad f'(0) = 0.$

$$f''(x) = (1+x^2)^{-1/2} + x\left(-\frac{1}{2}\right)2x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}-1}$$
$$= (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} - x^2(1+x^2)^{-3/2}$$
$$= (1+x^2)^{-3/2}(1+x^2-x^2)$$
$$= (1+x^2)^{-3/2}$$

$f''(0) = 1$

$$f^{(3)}(x) = -\frac{3}{2} 2x (1+x^2)^{-3/2-1}$$
$$= -3x(1+x^2)^{-\frac{5}{2}}$$

$f^{(3)}(0) = 0$

$$f^{(4)}(x) = -3(1+x^2)^{-\frac{5}{2}} + 3 \cdot \frac{5}{2} x \, 2x (1+x^2)^{-\frac{5}{2}-1}$$
$$= -3(1+x^2)^{-\frac{5}{2}} + 15x^2(1+x^2)^{-\frac{7}{2}}$$

$f^{(4)}(0) = -3$

$f \in C^\infty(\mathbb{R})$, donc son d.l d'ordre n peut être obtenu par son développement de Taylor d'ordre n.

Par suite : $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + x^4\varepsilon_1(x)$ avec $\varepsilon_1(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4!}x^4 + x^4\varepsilon_1(x)$$
$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + x^4\varepsilon_1(x)$$

b) $g(x) = \sin(2\pi x)$ $\qquad a = \frac{1}{3} \qquad n = 3$.

$g(x) = \sin(2\pi x)$ $\qquad g\left(\frac{1}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$g'(x) = 2\pi\cos(2\pi x)$ $\qquad g'\left(\frac{1}{3}\right) = 2\pi\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -2\pi\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2\pi\frac{1}{2} = -\pi$

$g''(x) = -4\pi^2\sin(2\pi x)$ $\qquad g''\left(\frac{1}{3}\right) = -4\pi^2\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -4\pi^2\frac{\sqrt{3}}{2} = -2\pi^2\sqrt{3}$.

$g^{(3)}(x) = -8\pi^3\cos(2\pi x)$ $\qquad g^{(3)}\left(\frac{1}{3}\right) = -8\pi^3\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 8\pi^3 \cdot \frac{1}{2} = 4\pi^3$

$g \in C^\infty(\mathbb{R})$, donc pour les mêmes raisons qu'en a), on peut écrire le d.l. de g à partir de son développement de Taylor.

$$g(x) = g\left(\tfrac{1}{3}\right) + g'\left(\tfrac{1}{3}\right)\cdot\left(x-\tfrac{1}{3}\right) + \frac{g''\left(\frac{1}{3}\right)}{2!}\left(x-\tfrac{1}{3}\right)^2 + \frac{g^{(3)}\left(\frac{1}{3}\right)}{3!}\left(x-\tfrac{1}{3}\right)^3 + \left(x-\tfrac{1}{3}\right)^3\varepsilon_2(x)$$

avec $\varepsilon_2(x) \xrightarrow[x\to\frac{1}{3}]{} 0$

$$\sin(2\pi x) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \pi\left(x-\tfrac{1}{3}\right) - \pi^2\sqrt{3}\left(x-\tfrac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}\pi^3\left(x-\tfrac{1}{3}\right)^3 + \left(x-\tfrac{1}{3}\right)^3\varepsilon_2(x)$$

c) $h(x) = \arctan x$ $\qquad a = 1 \qquad n = 2$.

$h(x) = \arctan x$ $\qquad h(1) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$

$h'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ $\qquad h'(1) = \frac{1}{2}$

$h''(x) = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$ $\qquad h''(1) = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$

$$h(x) = h(1) + h'(1)(x-1) + \frac{h''(1)}{2}(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon_3(x) \qquad \varepsilon_3(x) \xrightarrow[x\to 1]{} 0$$

$$\arctan x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon_3(x) \quad \text{car } h \in C^\infty(\mathbb{R})$$

Exercice 2 :

a) $f_1(x) = e^x \sqrt{1+x^2}$ $\qquad DL_5(0)$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + x^5 \varepsilon_1(x) \quad \text{avec } \varepsilon_1(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + (-1)^{3-1}\frac{1\times 3}{2\times 4\times \cancel{6}_{2}} x^3 + (-1)^{4-1}\frac{1\times \cancel{3}\times 5}{2\times 4\times \cancel{6}_{2}\times 8} x^4 + (-1)^{5-1}\frac{1\times \cancel{3}\times \cancel{5}\times 7}{2\times 4\times \cancel{6}_{2}\times 8\times \cancel{10}_{2}} x^5 + x^5 \varepsilon_2(x) \quad \text{avec } \varepsilon_2(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

$$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2^3} + \frac{x^3}{2^4} - \frac{5x^4}{2^7} + \frac{7x^5}{2^8} + x^5 \varepsilon_2(x)$$

$$f_1(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2^3} + \frac{x^3}{2^4} - \frac{5x^4}{2^7} + \frac{7x^5}{2^8}$$

$$+ x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2^3} + \frac{x^4}{2^4} - \frac{5x^5}{2^7}$$

$$+ \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2^2} - \frac{x^4}{2^4} + \frac{x^5}{2^5}$$

$$+ \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{2.3!} - \frac{x^5}{2^3.3!}$$

$$+ \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{2.4!}$$

$$+ \frac{x^5}{5!} + x^5 \varepsilon_3(x) \quad \text{avec } \varepsilon_3(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

Donc :

$$f_1(x) = 1 + \left(1+\frac{1}{2}\right)x + \left(-\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3!}\right)x^3$$

$$+ \left(-\frac{5}{2^7} + \cancel{\frac{1}{2^4}} - \cancel{\frac{1}{2^4}} + \frac{1}{\underbrace{2.3!}_{2^2\times 3}} + \frac{1}{\underbrace{4!}_{2^3\times 3}}\right)x^4 + \left(\frac{7}{2^8} - \frac{5}{2^7} + \frac{1}{2^5} - \frac{1}{\underbrace{2^3\,3!}_{2^4\times 3}} + \frac{1}{\underbrace{2.4!}_{2^4\times 3}} + \frac{1}{\underbrace{5!}_{2^3\times 3\times 5}}\right)x^5 + x^5 \varepsilon_3(x)$$

$$= 1 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{2^3}x^2 + \frac{3 - 6 + 12 + 8}{3.2^4}x^3$$

$$+ \frac{-15 + 32 + 16}{2^7.3}x^4 + \frac{105 - 150 + 120 - 80 + 80 + 32}{2^8\times 3\times 5}x^5 + x^5 \varepsilon_3(x)$$

$$= 1 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{2^3}x^2 + \frac{17}{3.2^4}x^3 + \frac{33}{3.2^7}x^4 + \frac{107}{2^8\times 3\times 5}x^5 + x^5 \varepsilon_3(x)$$

b) $f_2(x) = \dfrac{1-\sinh x}{1+\cosh x}$ $\qquad DL_4(0)$

$\cosh x = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + x^4 \varepsilon_4(x)$ avec $\varepsilon_4(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

$= 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{2^3 . 3} + x^4 \varepsilon_4(x)$

$\sinh x = x + \dfrac{x^3}{3!} + x^4 \varepsilon_5(x)$ avec $\varepsilon_5(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

$f_2(x) = \dfrac{1 - x - \dfrac{x^3}{2.3} - x^4 \varepsilon_5(x)}{2 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{2^3 . 3} + x^4 \varepsilon_4(x)}$

Division suivant les puissances croissantes, diviseur : $2 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{2^3.3}$

Quotient : $\dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{2^3} + \dfrac{x^3}{2^3 \times 3} + \dfrac{x^4}{2^4 \times 3}$

$1 - x - \dfrac{x^3}{2.3}$

$1 + \dfrac{x^2}{2^2} + \dfrac{x^4}{2^4.3}$

$-x - \dfrac{x^2}{2^2} - \dfrac{x^3}{2.3} - \dfrac{x^4}{2^4.3}$

$-x - \dfrac{x^3}{2^2}$

$-\dfrac{x^2}{2^2} - \left(\dfrac{1}{2.3} - \dfrac{1}{2^2}\right)x^3 - \dfrac{x^4}{2^4.3}$

$= -\dfrac{x^2}{2^2} + \dfrac{x^3}{2^2 \times 3} - \dfrac{x^4}{2^4.3}$

$-\dfrac{x^2}{2^2} - \dfrac{x^4}{2^4}$

$\dfrac{x^3}{2^2 \times 3} - \left(\dfrac{1}{2^4.3} - \dfrac{1}{2^4}\right)x^4$

$= \dfrac{x^3}{2^2 \times 3} + \dfrac{1}{2^3 \times 3} x^4$

$\dfrac{x^3}{2^2 \times 3}$

$\dfrac{1}{2^3 \times 3} x^4$

$\dfrac{1}{2^3 \times 3} x^4$

Donc $f_2(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{2^3} + \dfrac{x^3}{2^3 \times 3} + \dfrac{x^4}{2^4 \times 3} + x^4 \varepsilon_6(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{x^3}{24} + \dfrac{x^4}{48} + x^4 \varepsilon_6(x)$ avec $\varepsilon_6(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

c) $f_3(x) = \sin(\ln(1+x))$ $\quad DL_3(0)$

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + x\, \varepsilon_7(x)$ avec $\varepsilon_7(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon_8(x)$ avec $\varepsilon_8(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

$$\sin(\ln(1+x)) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) - \frac{1}{3!}\left(x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right)^3 + x^3\, \varepsilon_9(x) \quad \text{avec } \varepsilon_9(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3!}x^3 + (\text{termes d'ordre} \geq 4) + x^3 \varepsilon_9(x)$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \quad \varepsilon_{10}(x) \quad \text{avec } \varepsilon_{10}(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

Exercice 3 : $f(x) = e^{x^2} - \frac{1+ax^2}{1+bx^2}$

$\lim\limits_{x\to 0} 1+bx^2 = 1 \neq 0$. Donc toute division de $1+ax^2$ par $1+bx^2$ suivant les puissances croissantes à l'ordre n permet d'obtenir le d.l. à l'ordre n au voisinage de 0 du quotient $\frac{1+ax^2}{1+bx^2}$

$$\begin{array}{l|l}
1 + ax^2 & 1 + bx^2 \\
\underline{1 + bx^2} & \overline{1 + (a-b)x^2 - b(a-b)x^4 + b^2(a-b)x^6 - b^3(a-b)x^8} \\
(a-b)x^2 & \\
\underline{(a-b)x^2 + b(a-b)x^4} & \\
\quad -b(a-b)x^4 & \\
\quad \underline{-b(a-b)x^4 - b^2(a-b)x^6} & \\
\qquad b^2(a-b)x^6 & \\
\qquad \underline{b^2(a-b)x^6 + b^3(a-b)x^8} & \\
\qquad\quad -b^3(a-b)x^8 &
\end{array}$$

$$\frac{1+ax^2}{1+bx^2} = 1+(a-b)x^2 - b(a-b)x^4 + b^2(a-b)x^6 - b^3(a-b)x^8 + \dots + (-1)^{n-1} b^{n-1}(a-b)x^{2n} + x^{2n}\varepsilon_1(x)$$

avec $\varepsilon_1(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n}\varepsilon_2(x) \quad \text{avec } \varepsilon_2(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

Donc :

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \dots + \frac{x^{2n}}{n!} + x^{2n}\varepsilon_3(x) \quad \text{avec } \varepsilon_3(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

$$e^{x^2} - \frac{1+ax^2}{1+bx^2} = (1-(a-b))x^2 + \left(\frac{1}{2} + b(a-b)\right)x^4 + \left(\frac{1}{3!} - b^2(a-b)\right)x^6 + \dots + \left(\frac{1}{n!} (-1)^{n-1} b^{n-1}(a-b)\right)x^{2n} + x^{2n}\varepsilon(x)$$

avec $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

Ce d.l commence par la plus grande puissance possible si les coefficients de $x^2, x^4 ..$ sont nuls. Donc

$$\begin{cases} 1-(a-b) = 0 \\ \frac{1}{2} + b(a-b) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a-b = 1 \\ \frac{1}{2} + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -\frac{1}{2} \\ a = b+1 = -\frac{1}{2}+1 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Dans ce cas, le coefficient de x^6 est $\frac{1}{3!} \; b^2(a-b) = \frac{1}{3!} - \frac{1}{4}$

$$= \frac{2-3}{12}$$

$$= -\frac{1}{12} \neq 0$$

Donc le d.l de $f(x)$ commencera par : $-\frac{x^6}{12} + \dots$

<u>Exercice 4 :</u> $\varphi(t) = (2t-1)e^t + 1$

$D_\varphi = \mathbb{R}$, φ n'est ni paire ni impaire.

$$\lim_{t\to-\infty} \varphi(t) = \lim_{t\to-\infty} \underbrace{2te^t}_{\to 0} - \underbrace{e^t}_{\to 0} + 1 = 1$$

La droite d'équation $y = 1$ est asymptote à C_φ, courbe représentative de φ

$$\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = \lim_{t\to+\infty} (2t-1)e^t + 1 = +\infty$$

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\varphi(t)}{t} = \lim_{t\to+\infty} \underbrace{\left(2 - \frac{1}{t}\right)}_{\to 2} \underbrace{e^t}_{\to +\infty} + \underbrace{\left(\frac{1}{t}\right)}_{\to 0} = +\infty.$$

C_φ admet une branche parabolique de direction asymptotique $y'oy$

$\varphi'(t) = 2\,e^t + (2t-1)\,e^t$

$= (2t+1)\,e^t$

t	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$\varphi'(t)$	$-$	0	$+$
$\varphi(t)$	$1 \searrow$	$\varphi(-\frac{1}{2})$	$\nearrow +\infty$

φ est strictement croissante sur $[0, +\infty[\subset]-\frac{1}{2}, +\infty[$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^{*+}$, $\varphi(x) > \varphi(0) = 0$ c-à-d. φ est strictement positive sur $\mathbb{R}^{*+}$

Soit à présent, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2}-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $-x \in \mathbb{R}^*$, $f(-x) = -f(x)$ et $f(0) = 0$. Donc f est impaire

f est continue sur $\mathbb{R}^*$, car quotient de fonctions continues (non nulles) sur $\mathbb{R}^*$

De plus $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x^2}-1}{x}$ f.i $\frac{0}{0}$

Une occasion d'utiliser les d.l !!! $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + x^2 \varepsilon_1(x)$ $\quad \varepsilon_1(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

$e^{x^2} = 1 + x^2 + x^2 \varepsilon_2(x)$ $\quad \varepsilon_2(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

$f(x) = \dfrac{1 + x^2 + x^2 \varepsilon_2(x) - 1}{x} = x + x\,\varepsilon_2(x)$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} x + x\,\varepsilon_2(x) = 0 = f(0)$

Donc f est continue en 0 et, par suite f est continue sur $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{x^2}-1}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} x\left(\underbrace{\dfrac{e^{x^2}}{x^2}}_{+\infty} - \underbrace{\dfrac{1}{x^2}}_{0}\right) = -\infty$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (puisque f est impaire

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \dfrac{2x\,e^{x^2} \cdot x - (e^{x^2}-1)}{x^2} = \dfrac{(2x^2-1)e^{x^2}+1}{x^2} = \dfrac{\varphi(x^2)}{x^2} > 0$ d'après la 1ère question car $x^2 \in \mathbb{R}^{*+}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x^2} \underset{x^2=X}{\uparrow}{=} \lim_{X\to 0} \frac{e^X-1}{X} \underset{\text{déjà calculé}}{\uparrow}{=} 1 > 0$$

Par suite $f'(0)=1$

Finalement : $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(x^2)}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$

x	$-\infty$ $\quad\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

f est continue, strictement croissante (de $-\infty$ à $+\infty$, c-à-d $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$) sur $\mathbb{R}$.
Donc f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Par suite f^{-1} existe et $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Montrons que f^{-1} est de classe au moins C^1.

On sait que si $f'(x_0) \neq 0$ alors $(f^{-1})'(f(x_0)) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$

Or $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) \neq 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, (f^{-1})'(f(x)) = \dfrac{1}{f'(x)}$

ou encore $\forall x \in \mathbb{R}, (f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Donc f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Montrons que f' est continue pour prouver que $(f^{-1})'$ l'est aussi.

Remarquons que $(f^{-1})''(x) = -\dfrac{(f^{-1})'(x)\, f''(f^{-1}(x))}{\left(f'(f^{-1}(x))\right)^2}$

$$= -\frac{\dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))} \cdot f''(f^{-1}(x))}{\left(f'(f^{-1}(x))\right)^2}$$

$$= -\frac{f''(f^{-1}(x))}{\left(f'(f^{-1}(x))\right)^3}$$

$(f^{-1})^{(3)}$ s'exprime également en fonction de $f^{(3)}$, f' et f^{-1}
$(f^{-1})^{(4)}$ " " " " " $f^{(4)}$, f' et f^{-1} avec des puissances
$(f^{-1})^{(5)}$ " " " " " $f^{(n)}$, f' et f^{-1} de $(f'(f^{-1}(x)))$ au dénominateur.

Donc pour montrer que f^{-1} est de classe au moins C^4, il suffit de montrer que f est au moins C^4.

Or $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(x^2)}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Montrer que f est de classe C^4 (ou plus) revient à montrer que f' est de classe C^3 (ou plus) ou encore que $t \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\varphi(t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ \underline{\underline{1}} & \text{si } t = 0 \end{cases}$ est de classe C^3.

Or $\dfrac{\varphi(t)}{t} = 2e^t - \dfrac{e^t - 1}{t}$

Donc il suffit de montrer que $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$t \longmapsto h(t) = \begin{cases} \dfrac{e^t - 1}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ \underline{1} & \text{si } t = 0 \end{cases}$

Attention $\underline{1} = \lim_{t \to 0}\left(-\dfrac{\varphi(t)}{t} + 2e^t\right)$ et non $\underline{\underline{1}}$

est de classe C^3.

<u>a) Montrons que h est de classe C^1.</u>

<u>i) Continuité :</u> h est continue sur $\mathbb{R}^*$
De plus, $\lim_{t \to 0} h(t) = \lim_{t \to 0} \dfrac{e^t - 1}{t} = 1 = h(0)$ $\Rightarrow$ h continue sur $\mathbb{R}$.
donc h est continue en 0

<u>ii) Dérivabilité :</u> h est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
$\forall t \in \mathbb{R}^*$, $e^t - 1 = t\,h(t) \underset{\text{passage à la dérivée}}{\Longrightarrow} \forall t \in \mathbb{R}^*$, $e^t = h(t) + t\,h'(t)$

$\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}^*,\ h'(t) = \dfrac{e^t - h(t)}{t} = \dfrac{e^t - 1 + 1 - h(t)}{t} = h(t) - \dfrac{h(t)-1}{t}$

Dérivabilité en 0 : $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{h(t)-h(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{e^t-1}{t} - 1}{t}$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1 - t}{t^2}$$

Or $e^t = 1 + t + \dfrac{t^2}{2} + t^2 \varepsilon(t)$ avec $\varepsilon(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$

Donc $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{h(t)-h(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^2}{2} + t^2\varepsilon(t)}{t^2}$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{2} + \varepsilon(t) = \frac{1}{2}$$

Par suite h est dérivable en 0 et $h'(0) = \frac{1}{2}$

Finalement :

$$h'(t) = \begin{cases} h(t) - \dfrac{h(t)-1}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

h continue sur $\mathbb{R}^*$ $\Rightarrow$ h' continue sur $\mathbb{R}^*$.

h' est-elle continue en 0 ?

$\displaystyle\lim_{t\to 0} h'(t) = \lim_{t\to 0} h(t) - \frac{h(t)-1}{t}$

$$= \lim_{t\to 0} h(t) - \underbrace{\lim_{t\to 0} \frac{h(t)-1}{t}}_{\text{déjà calculé}}$$

h continue en 0

$$= h(0) - h'(0)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = h'(0).$$ Donc h' continue en 0

Conclusion 1

$$\left.\begin{array}{l} h' \text{ continue sur } \mathbb{R}^* \\ h' \text{ continue en } 0 \end{array}\right\} \Rightarrow h' \text{ continue sur } \mathbb{R} \iff h \in C^1(\mathbb{R})$$

b) Montrons que h est de classe C^2 c-à-d. h' est de classe C^1

i) Continuité

h' continue sur $\mathbb{R}$ d'après a)

ii) Dérivabilité

$\forall t \in \mathbb{R}^*$, $e^t = h(t) + t h'(t)$ et h' dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Donc, par passage à la dérivée, $\forall t \in \mathbb{R}^*$,

$$e^t = h'(t) + h'(t) + t h''(t) = 2h'(t) + t h''(t)$$

d'où $\forall t \in \mathbb{R}^*$,

$$h''(t) = \frac{e^t - 2h'(t)}{t} = \frac{e^t - 1 + 1 - 2h'(t)}{t} = h(t) - 2\left(\frac{h'(t) - \frac{1}{2}}{t}\right) = h(t) - \frac{2h'(t) - 1}{t}$$

h' est-elle dérivable en 0 ?

$$\lim_{t\to 0} \frac{h'(t) - h'(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{h(t) - \frac{h(t)-1}{t} - \frac{1}{2}}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{h(t) - 1 + 1 - \frac{h(t)-1}{t} - \frac{1}{2}}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \left(\frac{h(t)-1}{t} - \frac{2h(t) - 2 - t}{2t^2}\right)$$

$$= h'(0) - \lim_{t\to 0} \frac{2h(t) - 2 - t}{2t^2}$$

$$\frac{2h(t) - 2 - t}{2t^2} = \frac{2e^t - 2 - 2t - t^2}{2t^3} \underset{\text{d.l}(0)}{=} \frac{2 + 2t + t^2 + \frac{t^3}{3} + t^3\varepsilon(t) - 2 - 2t - t^2}{2t^3} = \frac{1}{3!} + \varepsilon(t)$$

$$\varepsilon(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$

Donc $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{h'(t)-h'(0)}{t} = d'(0) - \dfrac{1}{3}$

$= \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3!} = - = \dfrac{1}{3}$ c.à.d. h' est dérivable en 0

et $h''(0) = \dfrac{1}{3}$

$$h'' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto h''(t) = \begin{cases} h(t) - \dfrac{2h'(t)-1}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ \dfrac{1}{3} & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

h et h' continues sur $\mathbb{R}^*$ $\Rightarrow$ h'' continue sur $\mathbb{R}^*$

h'' est-elle continue en 0 ?

$$\lim_{t\to 0} h''(t) = \lim_{t\to 0}\left(h(t) - \frac{2h'(t)-1}{t}\right)$$

$$= \lim_{t\to 0} h(t) - \lim_{t\to 0} \frac{2h'(t)-1}{t}$$

h continue en 0

$$= h(0) - \lim_{t\to 0} 2\,\frac{h'(t)-\frac{1}{2}}{t}$$

$$= 1 - 2\lim_{t\to 0} \frac{h'(t)-h'(0)}{t}$$

$$= 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} = h''(0)$$

Donc,

h'' est continue en 0.

<u>Conclusion 2</u>: $\left.\begin{array}{l} h'' \text{ continue sur } \mathbb{R}^* \\ h'' \text{ continue en } 0 \end{array}\right\} \Rightarrow h''$ continue sur $\mathbb{R} \Leftrightarrow h \in C^2(\mathbb{R})$

c) <u>Montrons que h est de classe C^3 c.à.d. h'' est de classe C^1</u>

i) <u>Continuité</u>: h'' continue sur $\mathbb{R}$ (d'après b)

ii) <u>Dérivabilité</u>: $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $e^t = 2h'(t) + t h''(t)$ et h'' dérivable sur $\mathbb{R}^*$

Donc, par passage $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $e^t = 2h''(t) + h''(t) + t h^{(3)}(t) = 3h''(t) + t h^{(3)}(t)$

d'où $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $h^{(3)}(t) = \dfrac{e^t - 3h''(t)}{t}$

$$= \frac{e^t - 1 + 1 - 3h''(t)}{t}$$

$$= h(t) - \frac{3h''(t) - 1}{t}$$

h'' est-elle dérivable en 0 ?

$$\lim_{t \to 0} \frac{h''(t) - h''(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{h(t) - \frac{2h'(t)-1}{t} - \frac{1}{3}}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{h(t) - 1 + 1 - \frac{2h'(t)-1}{t} - \frac{1}{3}}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \left(\frac{h(t) - 1}{t} - \frac{\frac{2h'(t)-1}{t} - \frac{2}{3}}{t} \right)$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{h(t) - h(0)}{t} - \lim_{t \to 0} \frac{6h'(t) - 3 - 2t}{3t^2}$$

$$= h'(0) - \lim_{t \to 0} \frac{6h'(t) - 3 - 2t}{3t^2}$$

$$6h'(t) - 3 - 2t = 6h(t) - \frac{6h(t) - 6}{t} - 3 - 2t$$

$$= \frac{6e^t - 6}{t} - \frac{6e^t - 6 - 6t}{t^2} - 3 - 2t$$

$$= \frac{6te^t - 6t - 6e^t + 6 + 6t - 3t^2 - 2t^3}{t^2}$$

$$\frac{6h'(t) - 3 - 2t}{3t^2} = \frac{6te^t \cancel{-6t} - 6e^t + 6 \cancel{+6t} - 3t^2 - 2t^3}{3t^4}$$

$$= \frac{6t\left(\cancel{1} + \cancel{t} + \cancel{\frac{t^2}{2}} + \frac{t^3}{3!} + t^3\varepsilon(t)\right) \cancel{-6t} - 6\left(\cancel{1} + \cancel{t} + \cancel{\frac{t^2}{2}} + \cancel{\frac{t^3}{3!}} + \frac{t^4}{4!} + t^4\varepsilon(t)\right) \cancel{+6} \cancel{+6t} \cancel{-3t^2} \cancel{-2t^3}}{t^4}$$

$$= \frac{t^4 - \frac{t^4}{4} + t^4\varepsilon(t)}{3t^4} = \frac{1}{4} + \frac{\varepsilon(t)}{3} \xrightarrow{t \to 0} \frac{1}{4}$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{h''(t) - h''(0)}{t} = h'(0) - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Donc h'' est dérivable en 0 et $h^{(3)}(0) = \frac{1}{4}$.

Finalement, $h^{(3)}(t) = \begin{cases} h(t) - \dfrac{3h''(t) - 1}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ \dfrac{1}{4} & \text{si } t = 0 \end{cases}$

h et h'' sont continues sur $\mathbb{R}^*$ $\Rightarrow$ $h^{(3)}$ continue sur $\mathbb{R}^*$.

$h^{(3)}$ est-elle continue en 0 ?

$$\lim_{t\to 0} h^{(3)}(t) = \lim_{t\to 0}\left(h(t) - \frac{3h''(t)-1}{t}\right)$$

$$= h(0) - 3\lim_{t\to 0}\frac{h''(t)-\frac{1}{3}}{t}$$

$$= h(0) - 3\lim_{t\to 0}\frac{h''(t)-h''(0)}{t}$$

$$= h(0) - 3\cdot\frac{1}{4}$$

$$= 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} = h^{(3)}(0)$$

Donc $h^{(3)}$ est continue en 0.

<u>Conclusion 3</u>. $\left.\begin{array}{l} h^{(3)} \text{ continue sur } \mathbb{R}^* \\ h^{(3)} \text{ continue en } 0 \end{array}\right\} \Rightarrow h^{(3)}$ continue sur $\mathbb{R}$ $\Rightarrow h \in C^3(\mathbb{R})$

<u>Conclusion générale</u> $h \in C^3(\mathbb{R}) \Rightarrow f' \in C^3(\mathbb{R}) \Rightarrow f \in C^4(\mathbb{R})$

$\Rightarrow f^{-1} \in C^4(\mathbb{R}) \Rightarrow f^{-1}$ admet un d.l. d'ordre 3 au voisinage de 0.

$\Rightarrow \exists\, a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + x^3\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = \dfrac{e^{x^2}-1}{x}$

$= \dfrac{1+x^2+\frac{(x^2)^2}{2}+x^4\varepsilon(x)-1}{x}$

$= x + \dfrac{x^3}{2} + x^3\varepsilon(x)$

$f^{-1}(\underbrace{f(x)}_{\substack{\downarrow x\to 0 \\ 0}}) = x \iff f^{-1}\left(x+\dfrac{x^3}{2}+x^3\varepsilon(x)\right) = x$

$\iff a_0 + a_1\left(x+\dfrac{x^3}{2}\right) + a_2\left(x+\dfrac{x^3}{2}\right)^2 + a_3\left(x+\dfrac{x^3}{2}\right)^3 + x^3\varepsilon(x) = x$

$\iff a_0 + a_1x + a_1\dfrac{x^3}{2} + a_2x^2 + a_3x^3 + x^3\varepsilon(x) = x$

$\iff a_0 + a_1x + a_2x^2 + \left(\dfrac{a_1}{2}+a_3\right)x^3 + x^3\varepsilon(x) = x = 0+x+0x^2+0x^3+x^3\varepsilon_1(x)$

Unicité des d.l $\Longrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = -\dfrac{a_1}{2} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

" $a_0 = a_2 = 0$ " était un résultat prévisible car f est impaire donc f^{-1} l'est aussi et tous les coefficients d'indices pairs sont nuls.

Finalement : $f^{-1}(x) = x - \dfrac{x^3}{2} + x^3\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

<u>Exercice 5</u> : a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\ln(1+x)-e^x}{1-\cos x} = ?$

$1+\ln(1+x)-e^x = \cancel{1}+\cancel{x}-\dfrac{x^2}{2} - \cancel{1} - \cancel{x} - \dfrac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_1(x)$ avec $\varepsilon_1(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

$= -x^2 + x^2\varepsilon_1(x)$

$1-\cos x = 1 - 1 + \dfrac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_2(x) = \dfrac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+\ln(1+x)-e^x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2+x^2\varepsilon_1(x)}{\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-1+\varepsilon_1(x)}{\frac{1}{2}+\varepsilon_2(x)} = \underline{\underline{-2}}$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x} = ?$$

$$a^x+b^x = e^{\ln a^x} + e^{\ln b^x}$$

$$= e^{x\ln a} + e^{x\ln b}$$

$e^X = 1+X+X\,\varepsilon(X)$ avec $\varepsilon(X) \xrightarrow[X\to 0]{} 0$

Donc $e^{x\ln a} = 1+x\ln a + x\,\varepsilon_1(x)$ $\qquad e^{x\ln b} = 1+x\ln b + x\,\varepsilon_2(x)$

$x\ln a \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

$$a^x+b^x = 2+x(\ln a+\ln b)+x\,\varepsilon_3(x)$$

$$\frac{a^x+b^x}{2} = 1+\frac{\ln a+\ln b}{2}x + x\,\varepsilon_4(x)$$

$$\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}}$$

$$= e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)}$$

$$\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right) = \ln\left(1+\frac{\ln a+\ln b}{2}x + x\,\varepsilon_4(x)\right)$$

$\frac{\ln a+\ln b}{2}x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

$$= \frac{\ln a+\ln b}{2}x + x\,\varepsilon_5(x)$$

$\ln(1+X) = X+X\varepsilon(X)$

$$e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)} = e^{\frac{\ln a+\ln b}{2}+\varepsilon_5(x)} \quad \text{avec } \varepsilon_5(x)\xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln a+\ln b}{2}+\varepsilon_5(x)}$$

$$= e^{\frac{\ln a+\ln b}{2}}$$

$$= e^{\frac{\ln a}{2}} \cdot e^{\frac{\ln b}{2}}$$

$$= e^{\ln a^{1/2}} \cdot e^{\ln b^{1/2}}$$

$$= \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}.$$

$$= \sqrt{ab}.$$

<u>Exercice 6</u> : 1) $f(x) = \ln(x^2+2x+2)$

$$= \ln\left(2\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)\right)$$

$$= \ln 2 + \ln\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)$$

$$\ln\left(1+\left(x+\frac{x^2}{2}\right)\right) = \ln(1+X) \quad \text{avec } X = x+\frac{x^2}{2}$$

$x+\frac{x^2}{2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

$$= X - \frac{X^2}{2} + X\,\varepsilon_1(X) \quad \text{avec } \varepsilon_1(X)\xrightarrow[X\to 0]{} 0$$

$$= \left(x+\frac{x^2}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(x+\frac{x^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x+\frac{x^2}{2}\right)^3 + \left(x+\frac{x^2}{2}\right)^3\varepsilon_2(x)$$

$$= x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + \frac{1}{3}x^3 + x^3\,\varepsilon_3(x)$$

$$= x + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)x^3 + x^3\,\varepsilon_3(x)$$

$$= x - \frac{x^3}{6} + x^3\,\varepsilon_3(x)$$

$$f(x) = \ln 2 + x - \frac{x^3}{6} + x^3\,\varepsilon_3(x)$$

Eq. de la tangente au point d'abscisse $x=0$: $y = x + \ln 2$

$$f(x)-y = -\frac{x^3}{6} + x^3\,\varepsilon_3(x)$$
$$= x^3 \underbrace{\left(-\frac{1}{6} + \varepsilon_3(x)\right)}_{<0} \qquad \varepsilon_3(x) \to 0$$

$x \to 0^+ \Rightarrow f(x)-y < 0$
$x \to 0^- \Rightarrow f(x)-y > 0$
$\Rightarrow$ La courbe est au-dessus (فوق) de la courbe à gauche de 0
" " au-dessous (تحت) " " à droite de 0

2) $y = f(x) = \dfrac{x+1}{1+e^{1/x}}$

$x \to \pm\infty \Rightarrow \frac{1}{x} \to 0$.

Posons $X = \frac{1}{x}$. Ainsi $y = \dfrac{\frac{1}{X}+1}{1+e^X} = \dfrac{1+X}{X+Xe^X} = f\left(\frac{1}{X}\right)$

$$X f\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{X+X^2}{X+Xe^X} = \frac{1+X}{1+e^X} = \frac{1+X}{1+1+X+\frac{X^2}{2}+X^2\varepsilon(X)} \qquad \varepsilon(X) \xrightarrow[X\to 0]{} 0$$
$$= \frac{1+X}{2+X+\frac{X^2}{2}+X^2\varepsilon(X)}$$

$$\begin{array}{l|l}
1+X & 2+X+\frac{X^2}{2} \\ \cline{2-2}
\underline{1+\frac{1}{2}X+\frac{X^2}{4}} & \frac{1}{2}+\frac{1}{4}X-\frac{X^2}{4} \\
\frac{1}{2}X-\frac{X^2}{4} & \\
\underline{\frac{1}{2}X+\frac{X^2}{4}} & \\
-\frac{X^2}{2} &
\end{array}$$

$$X f\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}X-\frac{1}{4}X^2+X^2\varepsilon_1(X)$$

$$\frac{1}{x} f(x) = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}\frac{1}{x}-\frac{1}{4}\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}\varepsilon_2(x) \qquad \varepsilon_2(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$$

$$f(x) = \frac{x}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\varepsilon_2(x)$$

La droite d'équation $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$ est asymptote à la courbe représentative de f au voisinage de ∞.

$$f(x) - y = -\frac{1}{4}\,\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\,\varepsilon_2(x)$$

$$= \frac{1}{x}\Big(\underbrace{-\frac{1}{4} + \varepsilon_2(x)}_{\xrightarrow{x \to \pm\infty}\ -\frac{1}{4}}\Big) \xrightarrow{x \to +\infty} 0^-$$

$$\frac{1}{x}\Big(-\frac{1}{4} + \varepsilon_2(x)\Big) \xrightarrow{x \to -\infty} 0^+$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - y = 0^-$ donc la courbe est au-dessous de l'asymptote au voisinage de $+\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - y = 0^+$ " " " au-dessus " " " " de $-\infty$