Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen	A.U 2018/2019 - M.I 1ère année
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 2 - Fiche de T.D n°2

Exercice 1 :

1. On considère la fonction

$$\begin{array}{rcl} f : [0,2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & f(x) = x^2 \end{array}$$

   et la subdivision $\Delta_n : 0 < 2/n < 4/n < \ldots < 2$. Évaluer la différence $S_{\Delta_n} - s_{\Delta_n}$ des sommes de Darboux, puis montrer à l'aide du critère d'intégrabilité que cette fonction est Riemann-intégrable.

2. On se donne à présent une fonction g définie sur $f([0,2])$, monotone et vérifiant

$$\exists \lambda > 0 \; \forall u, v \in f([0,2]) \quad |g(u) - g(v)| \leq \lambda |u - v| \quad \text{(lipschitzienne)}$$

   Montrer, en suivant les étapes de la première question, que $g \circ f$ est aussi Riemann-intégrable.

Exercice 2 : Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \frac{3x-1}{(x+1)^2}\, dx \quad , \quad \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+4x+7}\, dx \quad , \quad \int_0^{\pi/2} x \sin x \, dx \quad , \quad \int_{-1}^1 (\arccos x)^2 \, dx$$

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\, dx \quad , \quad \int_1^2 x^2 \ln x \, dx$$

Exercice 3 : En interprétant les suites suivantes comme des sommes de Riemann, calculer leurs limites :

$$u_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{n+k} \quad , \quad w_n = \left(\frac{(2n)!}{n! n^n} \right)^{1/n} \quad , \quad \theta_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{\sqrt{4n^2 - k^2}}$$

Indication : pour la deuxième, passer d'abord à $\ln w_n$.

Exercice 4 : Montrer que si f est une fonction continue sur $[0,1]$ et telle que $\int_0^1 f(x)\; dx = 0$, alors $\exists c \in [a,b]$ tel que $f(c) = 0$. Trouver un contre-exemple à ce résultat si on laisse tomber l'hypothèse de continuité. En déduire que si une fonction g est continue sur $[0,1]$ avec $\int_0^1 g(x)\, dx = 1/2$, alors $\exists d \in [0,1]$ tel que $g(d) = d$.

Exercice 5 : Soit $f : [a,b] \longrightarrow [c,d]$ continûment dérivable, strictement croissante et bijective. Calculer la valeur de $\int_a^b f(t)\, dt + \int_c^d f^{-1}(u)\, du$.

Exercice 6 : Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que la fonction définie par :

$$g(x) = x \int_a^x (1-t) f(t)\, dt + (1-x) \int_x^b t f(t)\, dt$$

est de classe C^2 et que $g'' = f$.