Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen	A.U 2018/2019 - M.I 1ère année
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 2 - Fiche de T.D n°1

Exercice 1 : En utilisant les polynômes de Taylor, après avoir justifié leur usage, écrire le développement limité de chacune des fonctions suivantes aux points et ordres repectifs :

$$f(x) = \sqrt{1+x^2} \quad , \quad a = 0 \quad , \quad n = 4$$
$$g(x) = \sin(2\pi x) \quad , \quad a = 1/3 \quad , \quad n = 3$$
$$h(x) = \arctan x \quad , \quad a = 1 \quad , \quad n = 2.$$

Exercice 2 : A partir des développements limités usuels, trouver les développements des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = e^x\sqrt{1+x}\ ,\ DL_5(0) \bullet f_2(x) = \frac{1-\sinh x}{1+\cosh x}\ ,\ DL_4(0) \bullet f_3(x) = \sin(\ln(1+x))\ ,\ DL_3(0).$$

Exercice 3 : On considère la fonction $f(x) = e^{x^2} - \dfrac{1+ax^2}{1+bx^2}$ où a et b sont deux paramètres réels. Trouver les valeurs de a et b de sorte que le développement limité de f au voisinage de 0 commence par la plus grande puissance de x possible.

Exercice 4 : Étudier la fonction réelle $\varphi(t) = (2t-1)e^t + 1$, puis montrer qu'elle est strictement positive sur $\mathbb{R}$. On considère ensuite la fonction $f(x) = \dfrac{e^{x^2}-1}{x}$ si $x \neq 0$, et $f(0) = 0$. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, puis que f^{-1} est de classe au moins C^3. Enfin, à partir du $\mathrm{DL}_3(0)$ de f, déduire le $\mathrm{DL}_3(0)$ de f^{-1}.

Exercice 5 : En utilisant les développements limités, calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+\ln(1+x)-e^x}{1-\cos x} \quad , \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}$$

où a, b sont deux paramètres strictement positifs.

Exercice 6 :

1. A l'aide d'un DL déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse $x = 0$ à la courbe représentative de la fonction $f(x) = \ln\left(x^2+2x+2\right)$ ainsi que la position de la courbe par rapport à cette tangente..
2. A l'aide d'un développement asymptotique au voisinage de $\pm\infty$, déterminer les équations des asymptotes éventuelles à la courbe d'équation

$$y = \frac{x+1}{1+e^{1/x}}$$

ainsi que la position de cette courbe par rapport à ces asymptotes.