Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen **Année Universitaire 2018-2019**
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

1ère Année LMD Mathématique et Informatique Algèbre 2

Fiche de TD 7 : Les applications linéaires

Exercice 1 :
Les applications suivantes de E dans F sont elles linéaires ? Si oui, déterminer une base du noyau et une base de l'image.
1. $E = F = \mathbb{R}^2, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = (2x+3y, x)$.
2. $E = F = \mathbb{R}^2, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = (y, x+y+1)$.
3. $E = \mathbb{R}^3, F = \mathbb{R}, \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = x+2y+z$.
4. $E = F = \mathbb{R}^2, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = (x+y, xy)$.
5. $E = F = \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = x^2$.

Exercice 2 :
Donner dans chaque cas la dimension du noyau de f, puis le rang de f.
L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(x,y,z) = (y,z,x)$.
2. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(x,y,z) = (x+y, y+z, x-z)$.
3. $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^4, f(x,y,z) = (x+y+z)(1,i,-1,i)$.
4. $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^4, f(x,y) = (x-y, x+iy, (2+i)x+y, 3ix+y)$.
5. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(x,y,z) = (2x+my-z, 2x+2y, x-2z)$, selon la valeur du paramètre réel m.

Exercice 3 :
Soit $\mathbb{R}_4[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 4.
Montrer que l'application f de $\mathbb{R}_4[X]$ dans lui même, définie par $f(P) = P - P'$ est linéaire.
L'application f est-elle injective ? surjective ?

Exercice 4 :
Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (-x+2y+z, y+3z, 2x-2y+4z)$.
a. Donner une base de l'image et une base du noyau de f. Décrire l'image de f par un système d'équations linéaires.
b. Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x = y$. Quelle est la dimension de E ? Donner une base de $f(E)$ et une base de $f^{-1}(E)$.

Exercice 5 :
Soit $f : \mathbb{R}_{n+1}[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ définie par $f(P) = (n+1)P - XP'$.
1. Justifier que f est bien définie et que c'est une application linéaire.
2. Déterminer le noyau de f.
3. Montrer que f est surjective.

Exercice 6 :
Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et f une application linéaire de E dans F. Montrer que f est un isomorphisme si et seulement si l'image par f de toute base de E est une base de F.

Exercice 7 :
Soient E un espace vectoriel réel de dimension 3, (e_1, e_2, e_3) une base de E et λ un réel.
Montrer que les relations $f_\lambda(e_1) = e_1 + e_2, f_\lambda(e_2) = e_1 - e_2$, et $f_\lambda(e_3) = e_1 + \lambda e_3$, définissent une application linéaire f_λ de E dans E.
Comment choisir λ pour que f_λ soit injective ? surjective ?