Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen **Année Universitaire 2018-2019**
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

1ère Année LMD Mathématique et Informatique Algèbre 2

Fiche de TD 6 : Les espaces vectoriels

Exercice 1 :
1. Soit $\mathbb{R}[X]_{\leqslant n}$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients réels, muni de l'addition des polynômes et de la multiplication d'un polynôme par un réel.
a. Montrer que $\mathbb{R}[X]_{\leqslant n}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
b. Que se passe-t-il si on prend $\mathbb{R}[X]_{=n}$?
2. L'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est noté $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Nous le munissons d'une :

- **Loi interne $\bigoplus$:** Soient f et g deux éléments de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. La fonction $f \bigoplus g$ est définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R} : (f \bigoplus g)(x) = f(x) + g(x).$$
(où le signe $\bigoplus$ désigne la loi interne de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans le membre de gauche et l'addition dans $\mathbb{R}$ dans le membre de droite).

- **Loi externe $\otimes$:** Si α est un nombre réel et f une fonction de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, la fonction $(\alpha \otimes f)$ est définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R} : (\alpha \otimes f)(x) = \alpha \times f(x).$$
(Nous désignons par $\otimes$ la loi externe de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et par $\times$ la multiplication dans $\mathbb{R}$).

Montrer que $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Exercice 2 :
Parmi les ensembles suivants, reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels :

1)$E_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x = t \text{ et } y = z\}$ 2)$E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z = 1\}$
3)$E_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + xy \geqslant 0\}$ 4)$E_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \geqslant 1\}$
5)$E_5 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) | f(0) = 1\}$ 6)$E_6 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) | f(1) = 0\}$
7)$E_7 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) | f \text{ est croissante }\}$ 8)$E_8 = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} | (u_n) \text{ tend vers } 0\}$

Exercice 3 :
1. Les familles suivantes sont-elles libres ?
i. $u_1 = (1,0,1), u_2 = (0,2,2)$ et $u_3 = (3,7,1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
ii. $v_1 = (1,0,0), v_2 = (0,1,1)$ et $v_3 = (1,1,1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. On considère dans $\mathbb{R}^n$ une famille de 4 vecteurs linéairement indépendants (e_1,e_2,e_3,e_4). Les familles suivantes sont-elles libres ?
a. $(e_1, 2e_2, e_3)$.
b. (e_1, e_3).
c. $(e_1, 2e_1 + e_4, e_4)$.
d. $(3e_1 + e_3, e_3, e_2 + e_3)$.
e. $(2e_1 + e_2, e_1 - 3e_2, e_4, e_2 - e_1)$.
Exercice 4 :
Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les sous ensembles suivants :
$E_1 = \{(a+b, b-3a, a) \in \mathbb{R}^3 | a,b \in \mathbb{R}\}$ et $E_2 = \{(c,-2c,c) \in \mathbb{R}^3 | c \in \mathbb{R}\}$.

1. Montrer que E_1 et E_2 sont des s.e.v de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base B_1 de E_1 et une base B_2 de E_2.
3. En déduire $\dim E_1$ et $\dim E_2$.
4. A-t-on $E_1 \bigoplus E_2 = \mathbb{R}^3$?

Exercice 5 :

Soient $P_0 = \dfrac{1}{2}(X-1)(X-2), P_1 = -X(X-2)$ et $P_2 = \dfrac{1}{2}X(X-1)$ trois polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Montrer que (P_0, P_1, P_2) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$, exprimer P dans la base (P_0, P_1, P_2).
3. Soit $Q = \alpha P_0 + \beta P_1 + \gamma P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$, exprimer Q dans la base $(1, X, X^2)$.
4. Pour tout A, B, et C réels montrer qu'il existe un unique polynôme R de $\mathbb{R}_2[X]$, tel que :

$$R(0) = A, R(1) = B \text{ et } R(2) = C.$$

Exercice 6 :

Soit $E = \{P \in \mathbb{R}_3[X] | P(-1) = P(1) = 0\}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer une base et la dimension de E.