Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

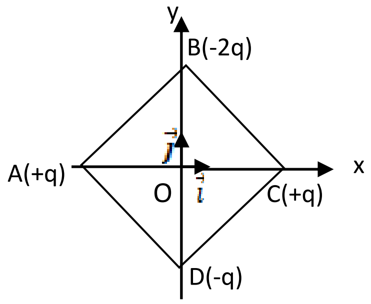
Année Universitaire 2018/2019
Durée : 01 h 30min
$1^{ère}$ Année LMD-MI

Rattrapage d'électricité

Exercice 1 : (07 points)

On place quatre charges ponctuelles aux sommets ABCD d'un carré de coté a.

1- Calculer la résultante des forces électrostatiques exercées sur la charge (-2q) située en B et représenter cette force.
2- Déduire le champ électrique au point B et représenter le.
3- Exprimer le potentiel V au point B crée par les trois autres charges.
4- Déterminer et représenter le champ électrostatique au point O (centre du carré).



Exercice 2 : (07 points)

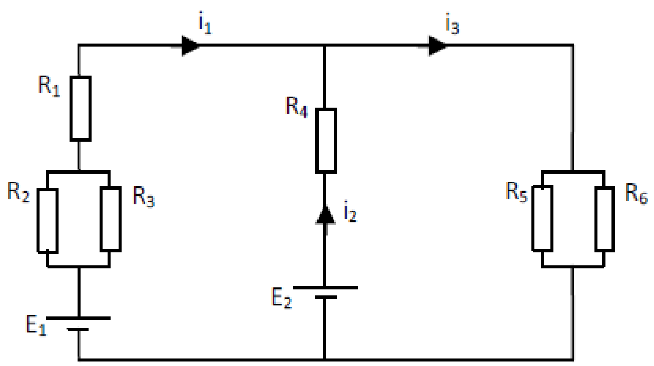
Une sphère de centre O et de rayon R contient une charge uniformément répartie avec une densité volumique ρ $\left(\text{avec } \rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\right)$.

1- En appliquant le théorème de GAUSS, trouver l'expression du champ électrique E(r) en tout point de l'espace
2- Déduire l'expression du potentiel électrique V(r) en tout point de l'espace.

Exercice 3 : (06 points)

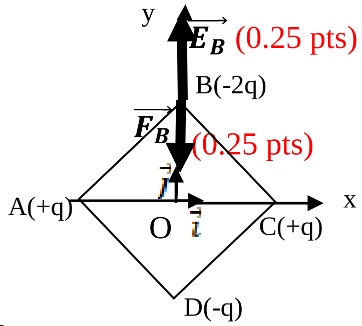
Le circuit suivant comporte six résistances (R_1=10Ω, R_2=20Ω, R_3=20Ω, R_4=5Ω, R_5=6Ω, R_6=3Ω) et deux générateurs (E_1=20v, E_2=10v).

1- Simplifier le circuit électrique en calculant les résistances équivalentes.
2- Calculer les intensités des courants I_1, I_2 et I_3en utilisant les lois de Kirchoff.



Bon courage

Corrigé du rattrapage



Exercice 1 (07 pts)

1-La force électrique produit au point B: (03 pts)

$\vec{F_B} = \vec{F_{AB}} + \vec{F_{DB}} + \vec{F_{CB}}$ (0.5 pts)

$\vec{F_{AB}} = k\frac{q_A q_B}{AB^2}\vec{U_{AB}}$, (0.25 pts) $\quad \vec{F_{DB}} = k\frac{q_B q_D}{BD^2}\vec{U_{DB}}$, (0.25 pts)

$\vec{F_{CB}} = k\frac{q_C q_B}{CB^2}\vec{U_{CB}}$, (0.25 pts) ,DB ^{2}=2a^2 (0.25 pts), CB^2= AB^2=a^2 (0.25 pts),

$\vec{U_{DB}} = \vec{j}$(0.25 pts), $\vec{U_{AB}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$ (0.25 pts) et $\vec{U_{CB}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$ (0.25 pts)

$\vec{F_B} = 2k\frac{q^2}{2a^2}\vec{j} - 2k\frac{q^2}{a^2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right) - 2k\frac{q^2}{a^2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right) \Rightarrow \boldsymbol{\vec{F_B} = k\frac{q^2}{a^2}(1 - 2\sqrt{2})\vec{j}}$(0.5 pts)

2- Le champ électrique exercé sur la charge q_B= -2q (01 pts)

$$\vec{E_B} = \frac{\vec{F_B}}{q_B} = k\frac{q}{a^2}\left(\frac{1}{(-2q)}(1 - 2\sqrt{2})\right)\vec{j}\text{(0.5 pts)} \Rightarrow \boldsymbol{\vec{E_B} = k\frac{q^2}{a^2}\left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)\vec{j}}\text{(0.5 pts)}$$

3- Le potentiel V_B crée au point B (01 pts)

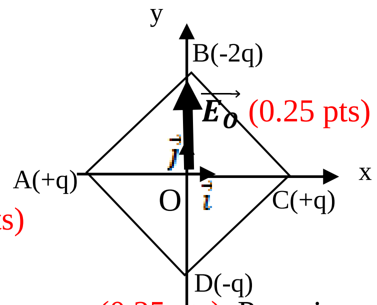
$V_B = V_A + V_D + V_C$ avec $V_A = k\frac{q_A}{AB}$, $V_D = k\frac{q_D}{DB}$, $V_C = k\frac{q_C}{CB}$

$$V_B = -k\frac{q}{a\sqrt{2}} + k\frac{q}{a} + k\frac{q}{a}\text{ (0.5 pts)} \Rightarrow \boldsymbol{V_D = k\frac{q}{a}\left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}\text{ (0.5 pts)}$$

4- le champ électrique au centre O (1.25 pts)

$\vec{E_O} = \vec{E_{AO}} + \vec{E_{BO}} + \vec{E_{CO}} + \vec{E_{DO}}$ (0.25 pts)

$\vec{E_{AO}} = k\frac{q_A}{AO^2}\vec{U_{AO}}$, $\quad \vec{E_{BO}} = k\frac{q_B}{BO^2}\vec{U_{BO}}$, $\quad \vec{E_{CO}} = k\frac{q_C}{CO^2}\vec{U_{CO}}$, $\quad \vec{E_{DO}} = k\frac{q_D}{DO^2}\vec{U_{DO}}$



DB^2=2a$\Rightarrow DB = a\sqrt{2}$ *donc* $DO = \frac{DB}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$(0.25 pts)

$\Rightarrow DO^2 = \frac{a^2}{2}$ *et* $AO^2 = CO^2 = DO^2 = BO^2 = \frac{a^2}{2}$

$\vec{U_{AO}} = \vec{i}, \vec{U_{CO}} = -\vec{i}, \ \vec{U_{DO}} = \vec{j}, \ \vec{U_{BO}} = -\vec{j}$ (0.5 pts)

$\vec{E_O} = 2k\frac{q}{a^2}\vec{i} - 2k\frac{q}{a^2}\vec{i} - 2k\frac{q}{a^2}\vec{j} + 4k\frac{q}{a^2}\vec{j} \Rightarrow \boldsymbol{\vec{E_O} = 2k\frac{q}{a^2}\vec{j}}$(0.25 pts)

Exercice 2 : (07 pts)

On prend comme surface de Gauss, une sphère de centre O et de rayon r (0.25 pts). Par raison de symétrie le champ est radial et constant en tout point de la surface de Gauss. (0.25 pts)

$\emptyset = \oiint \vec{E}.\vec{ds} = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}$(0.5 pts)

$\vec{E} \ // \ \vec{ds}$ Donc :$\oiint \vec{E}.\vec{ds} = \iint E.ds = E\iint ds = E.S = E4\pi r^2 \Rightarrow \boldsymbol{E4\pi r^2} = \frac{\sum \boldsymbol{Q_{int}}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}}$ (0.5pts)

$\Rightarrow \boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{Q_{int}}}{\boldsymbol{4\pi r^2 \varepsilon_0}}$ $(*)$ **avec** $\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$

1- Le champ électrostatique E(r) en tout point de l'espace. (02.5 pts)

Nous avons 2 cas

1er cas r<R

$dq = \rho dv = \rho 4\pi r^2 dr \Rightarrow Q_{int} = \rho \iiint dv = \rho 4\pi \int_0^r r^2 dr$ (0.25 pts)

$\Rightarrow Q_{int} = \rho\ \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\frac{4}{3}\pi r^3$ (0.25 pts) donc $Q_{int} = \frac{Q}{R^3}r^3$ (0.25 pts)

$(*) \Rightarrow\ E = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0 R^3} r^3$ donc $\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{Q}}{\boldsymbol{4\pi\varepsilon_0 R^3}} \boldsymbol{r}$ (0.5 pts)

<u>2eme cas r≥ R</u>

$dq = \rho dv = \rho 4\pi r^2 dr \Rightarrow Q_{int} = \rho \iiint dv = \rho 4\pi \int_0^R r^2 dr$ (0.25 pts)

$\Rightarrow Q_{int} = \rho\ \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\frac{4}{3}\pi R^3 = Q$ (0.5 pts)

$(*) \Rightarrow\ \boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{Q}}{\boldsymbol{4\pi r^2 \varepsilon_0}}$ (0.5 pts)

2- Le potentiel électrique E(r) en tout point de l'espace. (03 pts)

$\vec{E} = -\overrightarrow{grad} v \Rightarrow E = -\frac{dv}{dr}$ (0.5 pts) donc $v = -\int E dr$ (0.25 pts)

1er cas : r<R

$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} r \Rightarrow v = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\int r dr$ donc $\boldsymbol{v_1} = -\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}\boldsymbol{r^2} + \boldsymbol{C_1}$ (0.5 pts)

<u>2eme cas r≥ R</u>

$E = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0} \Rightarrow v = -\frac{\boldsymbol{Q}}{\boldsymbol{4\pi\varepsilon_0}}\int \frac{1}{r^2} dr$ donc $\boldsymbol{v_2} = \frac{\boldsymbol{Q}}{\boldsymbol{4\pi\varepsilon_0}}\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{C_2}$ (0.5 pts)

Le potentiel a l'infini ($r \rightarrow \infty$) v=0(0.25 pts)donc $\lim_{r\to\infty} v = 0$ donc C_2=0 (0.25 pts)

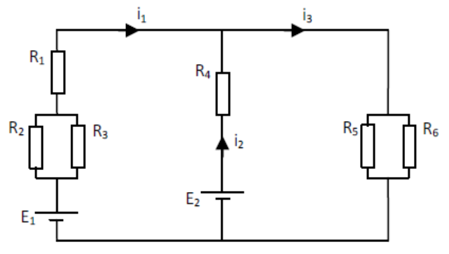
Alors $\boldsymbol{v_2} = \frac{\boldsymbol{Q}}{\boldsymbol{4\pi\varepsilon_0}}\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{r}}$ (0.25 pts)

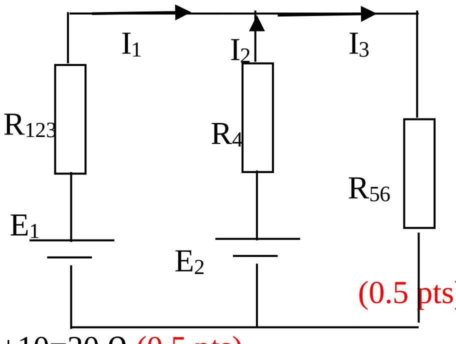
Le potentiel est une fonction continue en R donc $\boldsymbol{v_1(R)} = \boldsymbol{v_2(R)}$(0.25 pts)

$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}R^2 + C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{3Q}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}$ donc $\boldsymbol{v_1} = -\frac{\boldsymbol{Q}}{\boldsymbol{4\pi\varepsilon_0}}\left(\frac{\boldsymbol{r^2}}{\boldsymbol{R^3}} - \frac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{2R}}\right)$ (0.25 pts)

<u>Exercice 3</u>

1- Simplification du circuit





(0.5 pts)

$\frac{1}{R_{23}} = \frac{1}{20} + \frac{1}{20} = \frac{1}{10} \Rightarrow R_{23} = 10\Omega$, (0.5 pts)et R_{123}=10+10=20 Ω (0.5 pts) ,

$\frac{1}{R_{56}} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} \Rightarrow R_{23} = 2\Omega$ (0.5 pts)

2- Les courants I_1, I_2 et I_3

Loi des noeuds: $I_1 + I_2 = I_3$ (01 pts)

Loi des mailles

$E_1 - R_{123}I_1 - + R_4 I_2 - E_2 = 0 \Rightarrow 20 - 20\ I_1 - + 5I_2 - 10 = 10 - 20\ I_1 - + 5I_2 = 0$ (1) (0.75 pts)

$E_2 - R_4 I_2 - R_{56} I_3 = 0 \Rightarrow 10 - 5I_2 - 2I_3 = 10 - 7I_2 - 2I_1 = 0$ (2) (0.75 pts)

(1)-10x (2)=90-75I_2=0⇒I_2=1,2A, (0.5 pts) et (2) ⇒10-8,4-2I_1 donc I_1=0,8 A(0.5 pts)

et I_3=1,2+0,8=2 A (0.5 pts)