Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2018/2019.

Première année M.I - Semestre 2.
Module : *Analyse 2* - Épreuve de Rattrapage.
Mercredi 18/09/2019 - Durée : 01h30mn.
Les calculatrices et téléphones portables sont strictement interdits.

Exercice 1 : (06pts) On considère la fonction

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

1. Calculer le développement limité de f au voisinage de $x_0 = 2$ et à l'ordre 3 (on pourra faire d'abord le changement de variable $x - 2 = t$).
2. En déduire (sans faire de nouveaux calculs) les valeurs de $f(2)$, $f'(2)$, $f''(2)$ et $f^{(3)}(2)$ (justifier votre réponse).

Exercice 2 : (08pts) On se propose d'évaluer l'intégrale

$$J(\lambda) = \int_0^\lambda \frac{dx}{e^x + e^{2x}}$$

où $\lambda > 0$ est un paramètre réel fixé.

1. Étudier la fonction $\varphi(t) = \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$ sur l'intervalle $[0, 1[$, et montrer que c'est une bijection de $[0, 1[$ dans $[0, +\infty[$.
2. Déterminer (l'unique) $a \in [0, 1[$ tel que $\varphi(a) = \lambda$.
3. A l'aide du changement de variable $x = \varphi(t)$ calculer $J(\lambda)$.
4. En déduire enfin la valeur de $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} J(\lambda)$.

Exercice 3 : (06pts) Déterminer la solution générale de l'équation différentielle suivante :

$$y' = x^2\left(y + y^4\right).$$

1ère Année M.I - Semestre II - 2018/2019

Module : « Analyse II » - Rattrapage.

Corrigé.

Exercice 1 : (06 pts) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

1°/ Calcul du $DL_3(2)$: Posons $x-2=t \Leftrightarrow x=2+t$

d'où $f(2+t) = \dfrac{2+t+1}{2+t-1} = \dfrac{3+t}{1+t}$.

Le fait de poser $x-2=t$, implique que lorsque x est dans un voisinage de 2, alors t est dans un voisinage de 0.

Le calcul du $DL_3(2)$ se fait par division euclidienne suivant les puissances croissantes :

$$\begin{array}{l|l}
3+t & 1+t \\ \cline{2-2}
-(3+3t) & 3-2t+2t^2-2t^3 \\ \cline{1-1}
-2t & \\
-(-2t-2t^2) & \\ \cline{1-1}
2t^2 & \\
-(2t^2+2t^3) & \\ \cline{1-1}
-2t^3 & \\
-(-2t^3-2t^4) & \\ \cline{1-1}
2t^4 &
\end{array}$$

4 pts

Donc $f(2+t) = 3-2t+2t^2-2t^3+t^3\varepsilon_1(t)$, $t \in V(0)$.

et $\boxed{f(x) = 3-2(x-2)+2(x-2)^2-2(x-2)^3+(x-2)^3\varepsilon(x)}$

2°/ Déduction des valeurs... : Sachant qu'au voisinage de $x_0=2$, f est C^∞, donc la partie principale du $DL_3(2)$ est donnée par le polynôme de Taylor, l'unicité implique que : 2 pts

$\boxed{f(2)=3}$ $\boxed{f'(2)=-2}$ $\boxed{f''(2)=4}$ $\boxed{f^{(3)}(2)=-12}$

Exercice 2 : (08 pts) $\quad J(\lambda) = \displaystyle\int_0^{\lambda} \frac{dx}{e^x + e^{2x}}, \ \lambda > 0.$

1°/ Etude de φ : $\quad \varphi(t) = \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right), \ t \in [0, 1[.$

$$\varphi(0) = \ln(1) = 0 \ ; \quad \lim_{\substack{t \to 1 \\ <}} \varphi(t) = +\infty.$$

$$\varphi'(t) = \frac{\frac{1-t+1+t}{(1-t)^2}}{\frac{1+t}{1-t}} = \frac{2}{1-t^2}.$$

le signe de $1-t^2$ sur $\mathbb{R}$ est donné par : $\quad - \ 0 \ + \ 0 \ - \quad$ (-1, 0, 1) — 1pt

d'où le tableau de variation :

t	0		1
φ'	2	$+$	$\Vert$
φ	0	$\nearrow$	$+\infty \ \Vert$

La fonction φ est continue, strictement croissante de $[0, 1[$ dans $[0, +\infty[$; donc c'est une bijection (réf : cours). (De plus elle est C^1 donc c'est un changement de variable). — 1pt

2°/ Détermination de a : $\quad \varphi(a) = \lambda = \ln\left(\frac{1+a}{1-a}\right), \ (a \in [0, 1[)$

$$\Longleftrightarrow \frac{1+a}{1-a} = e^{\lambda} \Longleftrightarrow 1 + a = e^{\lambda}(1-a) \Longleftrightarrow (1 + e^{\lambda})a = e^{\lambda} - 1$$ — 2pts

et donc $\boxed{a = \dfrac{e^{\lambda} - 1}{e^{\lambda} + 1}}$

3°/ Calcul de $J(\lambda)$: $\quad J(\lambda) = \displaystyle\int_0^{\lambda} \frac{dx}{e^x(1+e^x)} = \int_0^a \frac{1}{\left(\frac{1+t}{1-t}\right)\left(1 + \frac{1+t}{1-t}\right)} \frac{2dt}{1-t^2}$

$$J(\lambda) = \int_0^a \frac{1-t}{(1+t)^2}\, dt = \int_0^a \left(\frac{2}{(1+t)^2} - \frac{1}{1+t}\right) dt$$ — 2pts

$$= \left[\frac{-2}{1+t} - \ln(1+t)\right]_0^a = \frac{-2}{1+a} - \ln(1+a) + 2$$

$$\boxed{J(\lambda) = \frac{2a}{1+a} - \ln(1+a)}, \quad a = \frac{e^{\lambda} - 1}{e^{\lambda} + 1}$$

4°/ Déduction de $\lim_{\lambda\to+\infty} J(\lambda)$: Il est clair que si $\lambda\to+\infty$, alors $a \underset{<}{\to} 1$.

Donc $\lim_{\lambda\to+\infty} J(\lambda) = \lim_{\substack{a\to 1\\ <}} \left[\frac{2a}{1+a} - \ln(1+a)\right]$ 2pts

$$= \boxed{1-\ln 2}.$$

Exercice 3 : (06pts) $y' = x^2(y+y^4)$.

C'est une équation à variables séparables, et aussi de Bernoulli.

Résolvons-la comme éq. à variables séparables.

$$\frac{y'}{y+y^4} = x^2 \iff \frac{y'}{y(1+y^3)} = x^2 \iff \frac{y'}{y(1+y)(y^2-y+1)} = x^2$$ 1pt

La décomposition en éléments simples de la fraction en y donne :

$$\frac{1}{y(y+1)(y^2-y+1)} = \frac{1}{y} - \frac{1/3}{y+1} - \frac{\frac{2}{3}y - \frac{1}{3}}{y^2-y+1}$$ 2pts

d'où après intégration :

$$\ln|y| - \frac{1}{3}\ln|y+1| - \frac{1}{3}\ln|y^2-y+1| = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}k, \text{ (k constante)}$$ 1pts

$$\Rightarrow \frac{y^3}{(y+1)(y^2-y+1)} = C x^3 \quad (C = \pm e^k).$$

$$\Rightarrow \frac{y^3}{y^3+1} = Cx^3 \Rightarrow y^3(1-Cx^3) = Cx^3$$ 1pts

et donc $y^3 = \frac{Cx^3}{1-Cx^3}$

$$\Rightarrow \boxed{y = \left(\frac{Cx^3}{1-Cx^3}\right)^{1/3}}.$$ 1pt