Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen **Année Universitaire 2018-2019**
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques **Date : 22/09/2019**

1ère Année LMD MI Durée : 01H30.

Epreuve de Rattrapage : Algèbre 2

Les calculatrices et téléphones portables sont strictement interdits

Exercice 1 : (06 points)

Soit l'application linéaire suivante :

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, x+z, x+y+z) \end{array}$$

1. Déterminer $\ker f$ le noyau de f et en déduire $\dim(\ker f)$.
2. f est-elle injective ? f est elle-surjective ? f est-elle bijective ?
3. Donner $\dim(\mathrm{Im} f)$; puis donner une base de $\mathrm{Im} f$.

Exercice 2 : (08 points)

Soient les ensembles suivants :

$E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y+z = 0\}$ et $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x-y = x+z = 0\}$.

1. Montrer que E_1 et E_2 sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner une base de E_1 et une base de E_2. En déduire $\dim E_1$ et $\dim E_2$.
3. Montrer par deux méthodes que $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2$.

Exercice 3 : (06 points)

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. La matrice A est-elle inversible ?
2. Calculer A^3.
3. En déduire que $(I-A)$ est inversible et en déduire l'expression $(I-A)^{-1}$.
4. Retrouver $(I-A)^{-1}$ en utilisant la comatrice.

Solution Exercice 1 :

Soit l'application linéaire suivante :

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, x+z, x+y+z) \end{array}$$

1. •
$$Ker(f) = \left\{u \in \mathbb{R}^3;\ f(u) = 0_{\mathbb{R}^3}\right\}.$$
$$f(u) = 0 \Rightarrow (x+y, x+z, x+y+z) = (0,0,0)$$
$$\Rightarrow (x = -y, x = -z, z) = (0,0,0)$$
Ce qui donne $x = y = z = 0$ et par suite $Ker(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
   • $dim(Ker(f)) = 0$
2. • Injectivité : puisque $dim(Ker(f)) = 0$ alors f est injective.
$$f \text{ est injective} \Leftrightarrow kerf = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$$
   • Surjectivité
$$\mathrm{Im} f = \left\{v \in \mathbb{R}^3;\ v = \ f(u) \text{ avec } u \in \mathbb{R}^3\right\} = f\left(\mathbb{R}^3\right)$$
Soit $v = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ tel que $v = f(u) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x' = x+y \\ y' = x+z \\ z' = x+y+z \end{array}\right.$
$\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x' = x+y \\ y' = x'-y+z \\ z' = x'+z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = x'+y'-z' \\ y = -y'+z' \\ z = z'-x' \end{array}\right.$ Et par suite f est surjective.
   • Bijectivité : f injective et surjective alors f bijective.
3. • $dim(Im(f)) = 3$, car
$$f \text{ est surjective} \Leftrightarrow dim(Imf) = dim(\mathbb{R}^3) = 3$$
   • Base de $Im(f)$: on a $X \in Im(f)$ alors $X = (x+y, x+z, x+y+z) = (x,x,x) + (y,0,y) + (0,z,z) = x(1,1,1) + y(1,0,1) + z(0,1,1)$. Alors la Base de $Im(f)$:
$$\{(1,1,1), (1,0,1), (0,1,1)\}.$$

Solution Exercice 2 :

$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x+y+z = 0\}$ et $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x-y = x+z = 0\}$

1. • $E_1 \neq \emptyset$, il contient au moins 0, car soit $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ et $0 + 0 + 0 = 0$ alors $E_1 \neq \emptyset$.
   Soit $X = (x, y, z), X' = (x', y', z') \in E_1$, et soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, il est clair que $\lambda X+\mu X' \in E_1$ alors $\lambda(x+y+z)+\mu(x'+y'+z') = 0$ car $X, X' \in E_1$.

   • $E_2 \neq \emptyset$, car il contient au moins 0, soit $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ et $0-0 = 0+0 = 0$ alors $E_2 \neq \emptyset$.
   Soit $X = (x, y, z), X' = (x', y', z') \in E_2$, et soit λ, μ deux réels quelconques.
   Par hypothèse on a d'une part $x - y = x + z$, alors
   $$\lambda(x - y) = \lambda(x + z) = 0. \tag{1}$$
   Et d'autre part $x' - y' = x' + z'$, d'où
   $$\mu(x' - y') = \mu(x' + z') = 0 \tag{2}$$
   (1)+(2) donne :
   $$lx + \mu x' - (ly + \mu y') = lx + \mu x' + lz + \mu z' = 0.$$
   Ainsi
   $$lX + \mu X' = \begin{pmatrix} lx + \mu x' \\ ly + \mu y' \\ lz + \mu z' \end{pmatrix} \in E_2.$$

2. • La base de E_1, on a $X \in E_1$ alors $x + y + z = 0 \Rightarrow x = -y - z$ alors $(x, y, z) = (-y - z, y, z) = (-y, y, 0) + (-z, 0, z) = y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1)$, et par suite la base de E_1 est
   $$\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$$
   alors la $dim(E_1) = 2$.
   • La base de E_2, soit $X \in E_2$ alors $x - y = x + z = 0 \Rightarrow z = -y$ et $y = x$ alors $(x, y, z) = (y, y, -y) = y(1, 1, -1) = y(1, 1, -1)$, et par suite la base de E_2 est
   $$\{(1, 1, -1)\}$$
   alors la $dim(E_2) = 1$.
   • 1ère méthode : on utilise la dimension, puisque
   $dim(E) = dim(\mathbb{R}^3) = dim(E_1) + dim(E_2)$ et d'autre part $dim(E_1 \cap E_2) = 0$, alors $dim(E_1 \oplus E_2) = dim(E_1) + dim(E_2)$, on déduit que
   $$\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2.$$

– 2ème méthode : on vérifie les propriétés de la somme directe, il faut vérifier que $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2$ et $E_1 \cap E_2 = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, on définit

$$E_1 + E_2 = \{X \in \mathbb{R}^3; X = x_1 + x_2 \text{ où } x_1 \in E_1 \text{ et } x_2 \in E_2\}$$

$E_1 + E_2 \subset \mathbb{R}^3$ clair par définition.
$\mathbb{R}^3 \subset E_1 + E_2$, soit $X \in \mathbb{R}^3$ tel que $X = (x, y, z)$ l'objectif est d'écrire $X = X_1 + X_2$ avec $X_1 \in E_1$ et $X_2 \in E_2$. Soit $X_1 = (x', y', z') \in E_1$ alors $x' + y' + z' = 0$, soit encore que $z' = -x' - y'$ donc $X_1 = (x', y', -x' - y')$. Soit $X_2 = (x'', y'', z'') \in E_2$ alors $x'' - y'' = x'' + z''$ soit encore que $y'' = x''$ et $z'' = -x''$ donc $X_2 = (x'', x'', -x'')$, et par suite

$$X = X_1 + X_2 \Leftrightarrow (x, y, z) = (x', y', -x' - y') + (x'', x'', -x'')$$

en identifiant composante par composante, on obtient le système

$$\begin{cases} x = x' + x'' \\ y = y' + x'' \\ z = -x' - y' - x'' \end{cases}$$

après substitution, et par un calcul direct on obtient

$$\begin{cases} x'' = x + y + z \\ x' = -y - z \\ y' = -x - z \end{cases}$$

il est alors facile de vérifier que $X = X_1 + X_2$, avec $X = (x, y, z)$ et $X_1 = (-y - z, -x - z, x + y + 2z) \in E_1$ et $X_2 = (x + y + z, x + y + z, -x - y - z) \in E_2$.
Pour l'intersection entre E_1 et E_2, il est clair que E_1, E_2 sont deux sous espaces vectoriels, ils contient au moins le $\{0_{\mathbb{R}^3}\}$ alors l'intersection n'est pas vide, soit $X \in E_1 \cap E_2$ donc $X \in E_1$ et $X \in E_1$, ce qui donne $x + y + z = 0$ et $x - y = x + z = 0 \Rightarrow x = y = -z = 0$ et $x + y + z = 0$ alors

$$E_1 \cap E_2 = \{(0, 0, 0)\}.$$

Solution Exercice 3 :
Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. $\det(A) = 2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$. Donc A est n'est pas inversible
2. $$A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
   $$\text{Alors} \quad A^3 = A^2.A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
3. Comme $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors $I = I - A^3$, d'un autre coté
   $I = I - A^3 = (I-A)(I+A+A^2)$, ce qui permet de conclure que $(I-A)$ est inversible et $(I-A)^{-1} = I + A + A^2$.
   $$(I-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
   $$= \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -5 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
4. $$I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
   $\det(I-A) = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -4 + 5 = 1 \neq 0$, alors $(I-A)$ est inversible.
   $\mathrm{com}(I-A) = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $(I-A)^{-1} = \dfrac{1}{det(I-A)}\,{}^t\mathrm{com}(I-A)$, alors
   $$(I-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -5 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$