Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2018/2019.

Première année M.I - Semestre 2.
Module : *Analyse 2* - Épreuve Finale.
Dimanche 08/09/2019 - Durée : 01h30mn.
Les calculatrices et téléphones portables sont strictement interdits.

Exercice 1 : (08pts) On considère le polynôme $P(x) = x^4 + x^2 + 1$.

1. Écrire P comme produit de deux polynômes de degré 2 (factorisation).
2. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $F(x) = \dfrac{2}{P(x)}$.
3. Calculer ensuite la valeur de l'intégrale $I(\lambda) = \displaystyle\int_0^\lambda F(x)\,dx$ où λ est un paramètre réel positif.
4. En déduire enfin la valeur de $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} I(\lambda)$.

Exercice 2 : (07pts) Trouver la solution générale de l'équation différentielle

$$\text{(E)} \qquad x(1-x)y' + (1+x)y = x$$

Montrer ensuite qu'il existe une unique solution qui vérifie : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} y(x) = 1$.

Exercice 3 : (05pts) Résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} xy' + y = -(x\ln x)y^2 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Préciser l'intervalle maximal d'existence de la solution.

1ère année M.I - Semestre 2 - 2018/2019.

Module: « Analyse II » - Epreuve Finale.

Corrigé.

Exercice 1: (08pts)

1°/ Factorisation de $P(x)=x^4+x^2+1$: On peut partir de la forme générale d'un polynôme du 2nd degré et écrire:

$$x^4+x^2+1=(\alpha x^2+\beta x+\gamma)(ax^2+bx+c)$$

Par identification on a:
$$\begin{cases} \alpha a=1 & (1)\\ \alpha b+\beta a=0 & (2)\\ \alpha c+\beta b+\gamma a=1 & (3)\\ \beta c+\gamma b=0 & (4)\\ \gamma c=1 & (5)\end{cases}$$

D'après (1) on a $\alpha=1/a$, (2) $\Rightarrow$ $\beta=-b/a^2$ et (5) $\Rightarrow$ $\gamma=1/c$

D'où $x^4+x^2+1=\left(\frac{1}{a}x^2-\frac{b}{a^2}x+\frac{1}{c}\right)(ax^2+bx+c)$

$$=\left(x^2-\frac{b}{a}x+\frac{a}{c}\right)\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$ 2pts

On utilise (4): $-\frac{bc}{a^2}+\frac{b}{c}=0 \Leftrightarrow b\left[\frac{1}{c}-\frac{c}{a^2}\right]=0$ or $b=0$ ne donne pas de solution, donc $\frac{1}{c}=\frac{c}{a^2}\Rightarrow a^2=c^2\Rightarrow a=\pm c$

Par (3) on a: $\frac{c}{a}-\frac{b^2}{a^2}+\frac{a}{c}=1$. Si $a=-c$ on obtient $\frac{b^2}{a^2}=-3$ impossible. Donc $a=c$ et $\frac{b^2}{a^2}=1 \Leftrightarrow b=\pm a$

En définitive $\boxed{P(x)=(x^2-x+1)(x^2+x+1)}$

2°/ Décomposition de $F(x)=\frac{2}{P(x)}$: On peut remarquer que $x^2\pm x+1$ possède $\Delta=1-4=-3<0$, donc ils sont indécomposables, d'où

$$\boxed{F(x)=\frac{ax+b}{x^2-x+1}+\frac{cx+d}{x^2+x+1}=\frac{x+1}{x^2+x+1}-\frac{x-1}{x^2-x+1}}$$ 2pts

par identification

3°/ Calcul de $I(\lambda)$:

$$F(x) = \frac{2x+1}{2(x^2+x+1)} - \frac{2x-1}{2(x^2-x+1)} + \frac{1}{2(x^2+x+1)} + \frac{1}{2(x^2-x+1)}$$

Remarquons que $x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left[1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2\right]$

$x^2-x+1 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left[1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2\right]$ 3pts

d'où $I(\lambda) = \int_0^\lambda F(x)\,dx = \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^\lambda$

$$\boxed{I(\lambda) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\lambda^2+\lambda+1}{\lambda^2-\lambda+1}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\lambda+1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\lambda-1}{\sqrt{3}}\right)}$$

4°/ Calcul de la limite :

$$\boxed{\lim_{\lambda\to+\infty} I(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}}$$ 1pt

---

Exercice 2 : (07pts) (E) $x(1-x)y' + (1+x)y = x$

C'est une équation différentielle d'ordre 1, linéaire avec second membre. Résolvons d'abord l'éq. homogène :

$$(E_0) : x(1-x)y_0' + (1+x)y_0 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{y_0'}{y_0} = \frac{1+x}{x(x-1)} = \frac{-1}{x} + \frac{2}{x-1}$$ 2pts

$$\Rightarrow \ln|y_0| = -\ln|x| + 2\ln|x-1| + k$$

$$\Rightarrow \boxed{y_0 = C\,\frac{(x-1)^2}{x}}$$

Cherchons une solution particulière $y_* = C(x)\frac{(x-1)^2}{x}$.

$$y_*' = C'(x)\frac{(x-1)^2}{x} + C(x)\frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$$

d'où $C'(x)\frac{(x-1)^2}{x}\cdot\cancel{x}(1-x) + \cancel{C(x)\frac{(x-1)(x+1)(1-x)}{x}} + \cancel{C(x)\frac{(x-1)^2(1+x)}{x}} = x$

$$\Rightarrow \quad C'(x) = \frac{-x}{(x-1)^3} = \frac{-1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-1)^3}$$

$$\Rightarrow \quad C(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2(x-1)^2}$$ 2pts

et donc $\boxed{y_* = \frac{x-1}{x} + \frac{1}{2x}}$

En définitive $\boxed{y(x) = y_0(x) + y_*(x) = C\cdot\frac{(x-1)^2}{x} + \frac{2x-1}{2x}}$ 1pts

Pour avoir $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 1$, il suffit de prendre $C = 0$

car $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{2x} = 1$, sinon $\lim_{x\to+\infty} y(x) = \infty$ si $C \neq 0$

et donc la solution cherchée est 2pts

$$\boxed{y(x) = \frac{2x-1}{2x} = 1 - \frac{1}{2x}}$$

Exercice 3: (05 pts) $\begin{cases} xy' + y = -(x\ln x)\,y^2 \\ y(1) = 1 \end{cases}$

C'est une équation de Bernoulli, divisons par y^2 $(y \neq 0)$

$$x\left(\frac{y'}{y^2}\right) + \frac{1}{y} = -x\ln x$$ 1pt

Posons $z = 1/y$. D'où

$$-xz' + z = -x\ln x$$

$$\Rightarrow xz' - z = x\ln x \quad / \times \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}z' - \frac{1}{x^2}z = \frac{1}{x}\ln x.$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{x}z\right)' = \frac{1}{x}\ln x$$ 2pts

$$\Rightarrow \frac{1}{x}z = \frac{1}{2}\ln^2 x + C$$

$$\Rightarrow z = Cx + \frac{1}{2}x\ln^2 x.$$

et donc $y(x) = \dfrac{1}{Cx + \frac{1}{2}x\ln^2 x}$. 1pts

La condition initiale $y(1) = 1$ implique que

$$1 = \frac{1}{C} \Rightarrow C = 1$$

d'où $\boxed{y(x) = \dfrac{1}{x\left[1 + \frac{1}{2}\ln^2 x\right]}}$ 0,5pts

L'intervalle maximale d'existence est $I =]0, +\infty[$. 0,5pt