Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2018-2019

Date : 11/09/2019

1ère Année LMD MI | Durée : 01H30.

Epreuve finale : Algèbre 2

Les calculatrices et téléphones portables sont strictement interdits

Exercice 1 : (04 points)
Soient E, F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels, $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une base de E et $f : E \to F$ une application linéaire.
Montrer que si f est injective alors $rang f = n$.

Exercice 2 : (04 points)
Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
1. Calculer A^2.
2. Montrer que $A^2 = A + 2I$.
3. En déduire A^{-1}.

Exercice 3 : (12 points)
Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique $B = \{e_1, e_2, e_3\}$, on considère l'application linéaire :

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (6x - 4y - 4z, 5x - 3y - 4z, x - y) \end{array}$$

1. Donner la matrice A de f par rapport à la base B.
2. Montrer que $Ker(f) = vect(u_1)$ où $u_1 = (2, 2, 1)$.
3. Soit $u_2 = e_1 + e_2$ et $u_3 = e_2 - e_3$. Calculer $f(u_2)$ et $f(u_3)$ en fonction de u_2 et u_3.
4. Donner la matrice D de f par rapport à la base $B' = \{u_1, u_2, u_3\}$ (sans utiliser les matrices de passages).
5. Déterminer la matrice de passage P de B à B'.
6. Soit n un entier naturel non nul; déterminer la matrice A^n en fonction de P, P^{-1}, D et n.
7. Calculer P^{-1} l'inverse de P.
9. En utilisant les deux questions précédentes 6 et 7, calculer A^n , pour tout entier naturel non nul n.

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2018-2019

Date : 11/09/2019

1ère Année LMD MI | Durée : 01H30.

Corrigé de l'épreuve finale : Algèbre 2

Les calculatrices et téléphones portables sont strictement interdits

---

Exercice 1 : (04 points)

Soient E, F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels, $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une base de E et $f : E \to F$ une application linéaire.

Montrer que si f est injective alors $rang f = n$.

Solution Exercice 1 :

Puisque $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ est une base de E alors $\dim E = n$. $\boxed{\text{1pt}}$

Par hypothèse f est une application linéaire injective ce qui implique que $\text{Ker} f = \{0\}$. $\boxed{\text{0.5pt}}$

Maintenant, utilisons le théorème du Noyau-Image :

$\dim E = \dim \text{Im} f + \dim \text{Ker} f$. $\boxed{\text{0.5pt}}$ et $rang f = \dim \text{Im} f$ $\boxed{\text{0.5pt}}$

Or, $\text{Ker} f = \{0\} \Rightarrow \dim \text{Ker} f = 0$. $\boxed{\text{0.5pt}}$

On obtient que $\dim E = \dim \text{Im} f + \dim \text{Ker} f = \dim \text{Im} f + 0$ $\boxed{\text{0.5pt}}$

$\Rightarrow rang f = \dim \text{Im} f = \dim E = n$. $\boxed{\text{0.5pt}}$

Exercice 2 : (04 points)

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2.
2. Montrer que $A^2 = A + 2I$.
3. En déduire A^{-1}.

Solution Exercice 2 :

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculons A^2 :

$$A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \boxed{1\text{pt}}.$$

2.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A+2I. \boxed{1\text{pt}}$$

3. En déduire A^{-1} :

$$A^2 = A + 2I \Rightarrow A^2 - A = 2I \boxed{0.5\text{pt}} \Rightarrow A(A-I) = 2I. \boxed{0.5\text{pt}}$$

Ce qui implique que $A^{-1} = \frac{1}{2}(A-I) \boxed{0.5\text{pt}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \boxed{0.5\text{pt}}$

Exercice 3 : (12 points)

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique $B = \{e_1, e_2, e_3\}$, on considère l'application linéaire :

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (6x-4y-4z, 5x-3y-4z, x-y) \end{array}$$

1. Donner la matrice A de f par rapport à la base B.
2. Montrer que $Ker(f) = vect(u_1)$ où $u_1 = (2,2,1)$.
3. Soit $u_2 = e_1 + e_2$ et $u_3 = e_2 - e_3$. Calculer $f(u_2)$ et $f(u_3)$ en fonction de u_2 et u_3.
4. Donner la matrice D de f par rapport à la base $B' = \{u_1, u_2, u_3\}$ (sans utiliser les matrices de passages).
5. Déterminer la matrice de passage P de B à B'.
6. Soit n un entier naturel non nul ; déterminer la matrice A^n en fonction de P, P^{-1}, D et n.
7. Calculer P^{-1} l'inverse de P.
9. En utilisant les deux questions précédentes 6 et 7, calculer A^n , pour tout entier naturel non nul n.

Solution Exercice 3 :

1. La matrice A de f par rapport à la base $B = \{e_1, e_2, e_3\}$:

$$\begin{cases} f(e_1) = f(1,0,0) = (6,5,1) = 6e_1 + 5e_2 + e_3 \\ f(e_2) = f(0,1,0) = (-4,-3,-1) = -4e_1 - 3e_2 - e_3 \quad \boxed{0.5\text{pt}} \\ f(e_3) = f(0,0,1) = (-4,-4,0) = -4e_1 - 4e_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -4 \\ 5 & -3 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \boxed{0.5\text{pt}}$$

2. $Kerf = \{v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(v) = (0,0,0)\}.$ $\boxed{0.5\text{pt}}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6x - 4y - 4z = 0 \\ 5x - 3y - 4z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 4z \\ 2y = 4z \\ x = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y = 2z \\ x = y \end{cases} \boxed{0.5\text{pt}}$$

Donc $Kerf = \{(2z, 2z, z)/z \in \mathbb{R}\} = \{z(2,2,1)/z \in \mathbb{R}\} = vect(u_1).$ $\boxed{0.5\text{pt}}$

3. $f(u_2) = f(e_1 + e_2) = f(e_1) + f(e_2)$ $\boxed{0.5\text{pt}}$

$$\Rightarrow (2,2,0) = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = \alpha(2,2,1) + \beta(1,1,0) + \gamma(0,1,-1) \boxed{0.5\text{pt}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = 2 \\ 2\alpha + \beta + \gamma = 2 \\ \alpha + \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 2 \\ \gamma = 0 \end{cases} \boxed{0.5\text{pt}}$$

Ce qui nous donne que $f(u_2) = 2u_2.$ $\boxed{0.5\text{pt}}$

$f(u_3) = f(e_2 - e_3) = f(e_2) - f(e_3)$ $\boxed{0.5\text{pt}}$

$$\Rightarrow (0,1,-1) = \alpha' u_1 + \beta' u_2 + \gamma' u_3 = \alpha'(2,2,1) + \beta'(1,1,0) + \gamma'(0,1,-1) \boxed{0.5\text{pt}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha' + \beta' = 0 \\ 2\alpha' + \beta' + \gamma' = 1 \\ \alpha' - \gamma' = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha' = 0 \\ \beta' = 0 \\ \gamma' = 1 \end{cases} \boxed{0.5\text{pt}}$$

Ce qui nous donne que $f(u_3) = 2u_3.$ $\boxed{0.5\text{pt}}$

4. D'après ce qui précède, on a : $\begin{cases} f(u_1) = 0 \\ f(u_2) = 2u_2 \\ f(u_3) = u_3 \end{cases}$ $\boxed{0.5\text{pt}}$

$$\Rightarrow D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \boxed{0.5\text{pt}}$$

5. La matrice de passage P de B à B' :

$$\begin{cases} u_1 = (2,2,1) = 2e_1 + 2e_2 + e_3 \\ u_2 = e_1 + e_2 \\ u_3 = e_2 - e_3 \end{cases} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \boxed{0.5\text{pt}}$$

6. La matrice D de f par rapport à B' est donnée par $D = P^{-1}AP$.

Donc $D^2 = DD = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) = P^{-1}APP^{-1}AP = P^{-1}AAP = P^{-1}A^2P$.

$D^3 = DD = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)(P^{-1}AP) = P^{-1}APP^{-1}APP^{-1}AP = P^{-1}AAAP = P^{-1}A^3P$.

Donc pour tout n non nul on a :

$$D^n = P^{-1}A^nP.$$

$$\Rightarrow PD^nP^{-1} = PP^{-1}A^nPP^{-1} = A^n.$$

$$\Rightarrow A^n = PD^nP^{-1}. \boxed{1\text{pt}}$$

7. Pour trouver la matrice inverse de P, il suffit d'écrire les vecteurs e_1, e_2, e_3 en fonction de u_1, u_2, u_3.

$$\begin{cases} u_1 = 2e_1 + 2e_2 + e_3 \\ u_2 = e_1 + e_2 \\ u_3 = e_2 - e_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_3 = u_1 - 2u_2 \\ e_2 = u_3 + e_3 = u_1 - 2u_2 + u_3 \\ e_1 = u_2 - e_2 = -u_1 + 3u_2 - u_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \boxed{1\text{pt}}$$

8. Calculons D^n pour n non nul :

$$D^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On remarque que $D^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 2^n & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.2^n & -2^{n+1} & -2^{n+1} \\ 3.2^n - 1 & -2^{n+1} + 1 & -2^{n+1} \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \boxed{2\text{pt}}$$