Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2018/2019.

Première année M.I - Semestre 2.
Module : *Analyse 2* - Épreuve de Rattrapage du contrôle.
Mercredi 04/09/2019 - Durée : 01h30mn.
Les calculatrices et téléphones portables sont strictement interdits.

Exercice 1 : (06pts) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\arcsin(x) = \arccos(x).$$

Exercice 2 : (07pts) On considère la fonction suivante :

$$f(x) = e^{x^2/4} + \sqrt{\cos x} - 2$$

1. Calculer le développement limité de f au voisinage de 0 et à l'ordre 4.
2. En déduire la valeur de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x^4}$.

Exercice 3 : (07pts) On donne la fonction

$$g(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$$

A l'aide d'un développement asymptotique au voisinage de $\pm\infty$, déterminer les équations des asymptotes obliques au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$, puis préciser la position de la courbe représentative de g par rapport à ces asymptotes.

On donne les développements suivants au voisinage de 0 :

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{16} + t^3\varepsilon(t)$$
$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} + t^6\varepsilon(t)$$
$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + t^3\varepsilon(t)$$

$1^{ère}$ année M.I – Semestre 2 – 2018/2019

Module : « Analyse II » – Rattrapage du Contrôle

Corrigé.

Exercice 1 : (06 pts) A résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\arcsin(x) = \arccos(x).$$

On sait que $\arcsin : [-1,1] \longrightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ et $\arccos : [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$

L'équation possède des solutions si les deux fonctions sont égales au même point. Or ceci ne peut pas se produire si $x \in [-1, 0]$ car dans ce cas $\arcsin(x) \in [-\pi/2, 0]$ et $\arccos(x) \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$. Donc les solutions sont à chercher dans $]0,1]$. 2pts

Appliquons de part et d'autre la fonction sinus :

$$\sin(\arcsin x) = \sin(\arccos x)$$

$$\Rightarrow \quad x = \sqrt{\sin^2(\arccos x)} \quad \text{car } \sin(\arccos x) \geq 0 \text{ pour } x \in [0,1].$$

$$= \sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)}$$

$$= \sqrt{1 - x^2}$$

2pts

$$\Rightarrow \quad x^2 = 1 - x^2 \Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = 1/2 \Rightarrow x = \pm 1/\sqrt{2}.$$

Comme on cherche les solutions dans $]0,1]$ alors :

* la "solution" $-1/\sqrt{2}$ est à rejeter
* la solution est $\boxed{x = \frac{1}{\sqrt{2}}}$. 2pts

Exercice 2 : (07 pts) $f(x) = e^{x^2/4} + \sqrt{\cos x} - 2$.

1°/ Calcul de $DL_4(0)$ de f :

On a $\cos x = (\sin x)' = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4 \varepsilon_1(x)$

d'où $\sqrt{\cos x} = \sqrt{1 + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)} + x^4 \varepsilon_2(x)$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) - \frac{1}{8}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 + x^4 \varepsilon_3(x)$$ 3pts

$$= 1 - \frac{1}{4}x^2 + \left(\frac{1}{48} - \frac{1}{32}\right)x^4 + x^4 \varepsilon_4(x)$$

$$\boxed{\sqrt{\cos x} = 1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{96}x^4 + x^4 \varepsilon_4(x)}$$

D'autre part : $\boxed{e^{x^2/4} = 1 + \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{32} + x^4 \varepsilon_5(x)}$ 1pt

Donc $f(x) = \left(\frac{1}{32} - \frac{1}{96}\right)x^4 + x^4 \varepsilon_6(x)$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{48}x^4 + x^4 \varepsilon_6(x)}$$ 1pts

2°/ Calcul de la limite :

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^4} = \lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{48} + \varepsilon_6(x)\right] = \boxed{\frac{1}{48}}$$ 2pts

Exercice 3 : (07 pts) $\quad g(x)=\sqrt{x^2-x+1}$

On a $g(x)=\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$. 1pt

$$\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=1+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)-\frac{1}{8}\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2+\frac{1}{x^2}\varepsilon_1(1/x)$$

$(x\to\pm\infty)$

$$=1-\frac{1}{2x}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}\varepsilon(1/x)$$

2pts

$$=1-\frac{1}{2x}+\frac{3}{8x^2}+\frac{1}{x^2}\varepsilon(1/x).$$

Ainsi :

* Si $x\to+\infty$: $\quad g(x)=x\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$

$$=x-\frac{1}{2}+\frac{3}{8x}+\frac{1}{x}\varepsilon(1/x)$$

c.à.d $\quad g(x)-\left[x-\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{x}\left[\frac{3}{8}+\varepsilon(1/x)\right]$

Ceci montre que l'équation de l'asymptote au voisinage de $+\infty$ est $\boxed{y=x-1/2}$ et que (C_g) se situe au dessus de cette asymptote car $g(x)-[x-1/2]\geq 0$ si $x>>1$. 2pts

* Si $x\to-\infty$: $\quad g(x)=-x\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$

$$=-x+\frac{1}{2}-\frac{3}{8x}-\frac{1}{x}\varepsilon(1/x)$$

et donc $\quad g(x)-\left[-x+\frac{1}{2}\right]=-\frac{1}{x}\left[\frac{3}{8}+\varepsilon(1/x)\right]$ 2pts

L'équation de l'asymptote au voisinage de $-\infty$ est $\boxed{y=-x+1/2}$ et (C_g) se situe au dessus de cette asymptote car

$$g(x)-\left[-x+\frac{1}{2}\right]\geq 0 \quad \text{si } x<<-1$$