Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2018/2019.

Première année M.I - Semestre 2.
Module : *Analyse 2* - Épreuve de contrôle.
Jeudi 04/07/2019 - Durée : 01h30mn.
Les calculatrices et téléphones portables sont strictement interdits.

Exercice 1 : (06pts) Soit a un paramètre réel. En faisant une discussion suivant les valeurs de a, donner explicitement les solutions de l'équation

$$\ln(\cosh x) = a.$$

Exercice 2 : (07pts) On considère la fonction suivante :

$$f(x) = \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^2 \sin^2 x}$$

1. Calculer le développement limité de f au voisinage de 0 et à l'ordre 1.
2. En déduire la valeur de $\lim_{x \to 0} f(x)$.

Exercice 3 : (07pts) On donne la fonction

$$g(x) = \frac{x^3+2}{x^2-1}$$

A l'aide d'un développement asymptotique au voisinage de $\pm\infty$, déterminer les équations des asymptotes obliques au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$, puis préciser la position de la courbe représentative de g par rapport à ces asymptotes.

On donne les développements suivants au voisinage de 0 :

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{16} + t^3\varepsilon(t)$$

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} + t^6\varepsilon(t)$$

1ère année M.I - Semestre II. (2018/2019)

Module: "Analyse II" - Contrôle -

Corrigé.

Exercice 1: (06pts) $a \in \mathbb{R}$ un paramètre, à résoudre suivant les valeurs de a, l'équation

$$(E) \quad \ln(\operatorname{ch} x) = a.$$

1ère méthode: * On sait que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch} x \geq 1$ donc $\ln(\operatorname{ch} x) \geq 0$ donc (E) n'a pas de solution si $a < 0$. 1pt +1/2

* Comme $\operatorname{ch} x$ est paire, si x est solution alors $-x$ est solution aussi. Soit alors $a \geq 0$. 1pt +1/2

$(E) \Leftrightarrow \operatorname{ch} x = e^a \Leftrightarrow x = \pm \operatorname{argch}(e^a)$. En définitive

- Si $a < 0$, pas de solution 1pt
- Si $a = 0$, une seule solution (double) $x = 0$. 1pt
- Si $a > 0$, deux solutions distinctes $x_1 = \operatorname{argch}(e^a)$, $x_2 = -\operatorname{argch}(e^a)$. 1pt

2ème méthode: $(E) \Leftrightarrow \operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = e^a$

$$\Leftrightarrow e^{2x} - 2e^a e^x + 1 = 0$$

Posons $e^x = X$, d'où $(E) \Leftrightarrow \begin{cases} X^2 - 2e^a X + 1 = 0 \\ \text{et } X > 0. \end{cases}$ 2

$\Delta' = e^{2a} - 1$, d'où

- $\Delta' < 0 \Leftrightarrow a < 0$, pas de solution. 1
- $\Delta' = 0 \Leftrightarrow a = 0$, une seule solution (double) $X = 1 \Leftrightarrow \boxed{x = 0}$ 1
- $\Delta' > 0 \Leftrightarrow a > 0$, deux solutions distinctes

$$X_1 = e^a - \sqrt{e^{2a} - 1} = \frac{1}{e^a + \sqrt{e^{2a} - 1}} > 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = \ln\left(e^a - \sqrt{e^{2a} - 1}\right)}$$ 2

$$X_2 = e^a + \sqrt{e^{2a} - 1} > 0 \Rightarrow \boxed{x_2 = \ln\left(e^a + \sqrt{e^{2a} - 1}\right) = -x_1}.$$ $\boxed{1}$

Exercice 2 : (07 pts) $\qquad f(x) = \dfrac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^2 \sin^2 x}$

1°/ En utilisant les développements donnés on peut écrire :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^6 \varepsilon_1(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5 \varepsilon_2(x)}$$

et $\quad \sin^2 x = x^2 - \dfrac{x^4}{3} + x^5 \varepsilon_3(x)$

$$\Rightarrow \boxed{x^2 \sin^2 x = x^4 - \frac{x^6}{3} + x^7 \varepsilon_3(x)}$$

Aussi : $\boxed{\sqrt{1-x^2} = 1 - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{8} + x^5 \varepsilon_4(x)}$

Alors $\cos x - \sqrt{1-x^2} = \left(\dfrac{1}{24} + \dfrac{1}{8}\right) x^4 + x^5 \varepsilon_5(x)$

$$= \frac{1}{6} x^4 + x^5 \varepsilon_5(x)$$

5 pts

On fait alors une division suivant les puissance croissants

$$\begin{array}{l|l} \frac{1}{6}x^4 & x^4 - x^6/3 \\ \hline -\left(\frac{1}{6}x^4 + \frac{x^6}{18}\right) & \frac{1}{6} \\ \hline -x^6/18 & \end{array}$$

il n'y aura pas de terme en x^1 car f est paire.

donc $\boxed{f(x) = \dfrac{1}{6} + x^1 \varepsilon_6(x)}$

2°/ Il est facile de déduire que

$$\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{6} + x^1 \varepsilon_6(x)\right) = 1/6}$$

2

Exercice 3 : (07pts) $\quad g(x) = \dfrac{x^3+2}{x^2-1}$

Pour faire un développement asymptotique au voisinage de $\pm\infty$, on ramène la situation à 0 en posant $\boxed{x = 1/t}$ 1

Alors $g(1/t) = \dfrac{1/t^3+2}{\frac{1}{t^2}-1} = \dfrac{1+2t^3}{t(1-t^2)}$

Développons en 0 la partie $\dfrac{1+2t^3}{1-t^2}$.

$$\begin{array}{l|l} 1+2t^3 & 1-t^2 \\ \underline{-(1-t^2)} & \overline{1+t^2+2t^3} \\ t^2+2t^3 & \\ \underline{-(t^2-t^4)} & \\ 2t^3+t^4 & \\ \underline{-(2t^3-2t^5)} & \\ t^4+2t^5 & \end{array}$$

Donc $\dfrac{1+2t^3}{1-t^2} = 1+t^2+2t^3+t^4\varepsilon(t)$ 1

$\Rightarrow g(1/t) = \dfrac{1}{t} + t + 2t^2 + t^3\varepsilon(t)$

ou bien $\boxed{g(x) = x + \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}\varepsilon(1/x)}$ 2

On voit que $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[g(x)-x] = 0$ donc la droite d'équation $\boxed{y=x}$ est asymptote au voisinage de $\pm\infty$. 1

De plus $g(x) - x = \dfrac{1}{x}\left[1 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2}\varepsilon(1/x)\right]$

- Au voisinage de $+\infty$, $g(x)-x > 0$ car $\dfrac{1}{x} > 0$, donc (C_g) est au dessus (فوق) de l'asymptote. 1
- Au voisinage de $-\infty$, $g(x)-x < 0$ car $\dfrac{1}{x} < 0$, donc (C_g) est en dessous (تحت) de l'asymptote. 1

3