Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2018-2019

Date : 27/06/2019

1ère Année LMD MI

Durée : 01H30.

Contrôle continu : Algèbre 2

Les calculatrices et téléphones portables sont strictement interdits

Exercice 1 : (06 points)

Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

$$u = (a, a-1, a), v = (a, 1-a, a).$$

1. A quelle condition sur $a \in \mathbb{R}$, les vecteurs u et v sont-ils linéairement indépendants ?
2. Dans le cas où u et v sont linéairement indépendants, trouver un vecteur $w \in \mathbb{R}^3$ telle que la famille $B = \{u, v, w\}$ soit une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2 : (06 points)

Soit f une application définie par :

$$\begin{array}{ll} & f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ ;;;;;;;;;;;;;;;;; & (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = (x + y, x + z). \end{array}$$

1. Vérifier que f est une application linéaire.
2. Déterminer $kerf$ le noyau de f, puis donner une base de $kerf$ et en déduire $dim(kerf)$.
3. f est- elle injective ?
4. Donner $dim(Imf)$ puis donner une base de Imf.
5. f est-elle surjective ?

Exercice 3 : (08 points)

Soient les deux ensembles suivants :

$$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - 3z = 0\} \text{ et } E_2 = \{(x, \alpha x, x) \in \mathbb{R}^3 / \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

1. Montrer que E_1 et E_2 sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner une base de E_1 et une base de E_2. En déduire $dimE_1$ et $dimE_2$.
3. Pour quelle(s) valeur(s) de α on a : $\mathbb{R}^3 = E_1 \bigoplus E_2$.

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2018-2019

Date : 27/06/2019

1ère Année LMD MI

Durée : 01H30.

Corrigé du contrôle continu : Algèbre 2

Solution Exercice 1 :

Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

$$u = (a, a-1, a), v = (a, 1-a, a).$$

1. Trouvons la valeur de a pour laquelle u et v sont linéairement indépendants. u et v sont linéairement indépendants si pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\alpha u + \beta v = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \alpha = \beta = 0. \boxed{0.5pt}$$

$$\alpha u + \beta v = 0_{\mathbb{R}^3} \boxed{0.5pt} \Rightarrow \alpha(a, a-1, a) + \beta(a, 1-a, a) = (0,0,0). \boxed{0.5pt}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha a + \beta a = 0 \\ \alpha(a-1) + \beta(1-a) = 0 \\ \alpha a + \beta a = 0 \end{cases} \boxed{0.5pt}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a(\alpha + \beta) = 0 \\ (a-1)(\alpha - \beta) = 0 \end{cases} \boxed{0.5pt}$$

Ce qui entraine que si $a \neq 0$ $\boxed{0.5pt}$ et $a \neq 1$ $\boxed{0.5pt}$ alors u et v sont linéairement indépendants car on obtiendra

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0. \boxed{0.5pt}$$

2. Pour que la famille $B = \{u, v, w\}$ soit une base de $\mathbb{R}^3$ il suffit qu'elle soit libre car $dim B = dim \mathbb{R}^3$. $\boxed{0.5pt}$ Soit $w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$, alors

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \alpha(a, a-1, a) + \beta(a, 1-a, a) + \gamma(w_1, w_2, w_2) = (0,0,0). \boxed{0.5pt}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha a + \beta a + \gamma w_1 = 0.........(1) \\ \alpha(a-1) + \beta(1-a) + \gamma w_2 = 0........(2) \\ \alpha a + \beta a + \gamma w_3 = 0........(3) \end{cases} \boxed{0.25pt}$$

$(1) - (3) \Rightarrow \gamma(w_1 - w_2) = 0$, donc $\gamma = 0$ entraine que $w_1 \neq w_3$. $\boxed{2.5pt}$
$(1) + (2) - 2 \times (3) \Rightarrow \beta(1 - 2a) - \alpha + \gamma(w_1 + w_2 - 2w_3) = 0$, donc il faut que $w_1 + w_2 - 2w_3 \neq 0$. $\boxed{0.25pt}$ Par exemple, on peut prendre $w = (1, 0, 2)$. $\boxed{0.25pt}$

Solution Exercice 2 :
Soit

$$f \quad : \quad \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y,z) \longmapsto (x+y, x+z)$$

1. f est une application linéaire, en effet pour $u=(x,y,z), v=(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(\lambda u + \mu v) &= f(\lambda(x,y,z) + \mu(x',y',z')) \\ &= f(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z') \\ &= (\lambda x + \mu x' + \lambda y + \mu y', \lambda x + \mu x' + \lambda z + \mu z') \\ &= \lambda(x+y, x+z) + \mu(x'+y', x'+z') \\ &= \lambda f(x,y,z) + \mu f(x',y',z') \\ &= \lambda f(u) + \mu f(v). \boxed{1.5\text{pt}} \end{aligned}$$

2. • $Ker(f) = \left\{u \in \mathbb{R}^3;\ f(u) = 0_{\mathbb{R}^2}\right\}$.

   $f(u) = 0 \Longrightarrow (x+y, x+z) = (0,0) \Longrightarrow \{x=-y \text{ et } x=-z\}$, $\boxed{0.25\text{pt}}$

   et par suite : $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$Ker(f) = \left\{u \in \mathbb{R}^3; u = (x,-x,-x),\ \text{où } x \in \mathbb{R}\right\} \boxed{0.25\text{pt}}$$

   • Base de $Ker(f)$ est $B = \{(1,-1,-1)\}$ $\boxed{0.25\text{pt}}$.
   • $dim(Ker(f)) = 1.$ $\boxed{0.25\text{pt}}$

3. Injectivité : on sait que

$$f \text{ est injective} \Longleftrightarrow ker f = \{0_{\mathbb{R}^3}\} \boxed{0.5\text{pt}}$$

   Puisque $ker f \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, alors f n'est pas injective. $\boxed{0.5\text{pt}}$

4. • $dim(Im(f))$, on a

$$dim(\mathbb{R}^3) = 3 = dim(Ker(f)) + dim(Im(f)). \boxed{0.25\text{pt}}$$

   Et par suite : $dim(Im(f)) = 2.$ $\boxed{0.25\text{pt}}$
   • Base de $Im(f)$, comme $dim Im(f) = 2 = dim(\mathbb{R}^2)$ et comme $Im(f)$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ alors nécessairement $Im(f) = \mathbb{R}^2$ $\boxed{0.5\text{pt}}$ et donc la base canonique $\{(1,0),(0,1)\}$ $\boxed{0.5\text{pt}}$ est une base de $Im(f)$.

5. Surjectivité : puisque $dim(Im(f)) = dim(\mathbb{R}^2) = 2$ alors f est surjective. $\boxed{1\text{pt}}$

Solution Exercice 3 :

Soient les ensembles suivants :

$$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - 3z = 0\} \text{ et } E_2 = \{(x, \alpha x, x) \in \mathbb{R}^3 / \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

où α est un paramètre réel.

1. • E_1 sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$:
   $E_1 \neq \emptyset$, car $(0,0,0) \in E_1$. $\boxed{1\text{pt}}$
   $\forall u = (x, y, z) \in E_1, \forall v = (x', y', z') \in E_1, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$:
   $$\lambda u + \mu v = (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z').$$
   Or,
   $$(\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y') - 3(\lambda z + \mu z') = \lambda\underbrace{(x + y - 3z)}_{0} + \mu\underbrace{(x' + y' - 3z)}_{0}.$$
   car $u = (x, y, z) \in E_1$ et $v = (x', y', z') \in E_1 \Rightarrow \lambda u + \mu v \in E_1$. $\boxed{1\text{pt}}$
   • E_2 sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$:
   $E_2 \neq \emptyset$, car $(0,0,0) \in E_2$. $\boxed{1\text{pt}}$
   $\forall u = (x, \alpha x, x) \in E_2, \forall v = (x', \alpha x', x') \in E_2, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$:
   $$\lambda\underbrace{(x, \alpha x, x)}_{u} + \mu\underbrace{(x', \alpha x', x')}_{v} = (\underbrace{\lambda x + \mu x'}_{X}, \underbrace{\alpha(\lambda x + \mu x')}_{\alpha X}, \underbrace{\lambda x + \mu x'}_{X}).$$
   Donc,
   $$\Rightarrow \lambda u + \mu v \in E_2. \boxed{1\text{pt}}$$

2. • La base de E_1 :
   $$u = (x, y, z) \in E_1 \Rightarrow x + y - 3z = 0 \Rightarrow y = 3z - x.$$
   on obtient
   $$u = (x, 3z - x, z) = (x, -x, 0) + (0, 3z, z) = x(1, -1, 0) + z(0, 3, 1).$$
   On conclu que la famille $(1, -1, 0), (0, 3, 1)$ $\boxed{0.5\text{pt}}$ est génératrice. Elle est libre car :
   $$\lambda(1, -1, 0) + \mu(0, 3, 1) = (0, 0, 0) \Rightarrow \lambda = \mu = 0.$$
   Donc c'est une base de E_1 et $dim(E_1) = 2$. $\boxed{0.5\text{pt}}$
   • La base de E_2 : $v = (x, y, z) \in E_2 \Rightarrow v = (x, \alpha x, x) = x(1, \alpha, 1)$ donc $\{(1, \alpha, 1)\}$ $\boxed{0.5\text{pt}}$ est une base de E_2 et par suite $dim(E_2) = 1$. $\boxed{0.5\text{pt}}$

3. La valeur de α pour laquelle

$$\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2.$$

Pour que E_1 et E_2 soient supplémentaires il est nécessaire d'avoir $E_1 \cap E_2 = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Soit $X = (x, y, z) \in E_1 \cap E_2$ alors

$$\begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ z = x \\ y = \alpha x \end{cases} \quad \boxed{0.5\text{pt}}$$

en substituant la valeur de y et de z obtenues des deux dernières équations dans la première, on obtient

$$x + \alpha x - 3x = 0,$$

soit encore

$$(\alpha - 2)\, x = 0, \boxed{0.5\text{pt}}$$

pour que la seule solution soit la solution triviale $x = 0$, il est nécessaire d'avoir $(\alpha - 2) \neq 0$ (car si $(\alpha - 2) = 0$, tous les réels sont solutions.) Donc si $\alpha \neq 2$ alors $x = 0$, en revenant aux autres équations on a que $y = z = 0$, soit que $E_1 \cap E_2 = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. D'un autre côté, comme $\dim(E_1 + E_2) = 3$ donc $E_1 + E_2 = \mathbb{R}^3$, et en conclusion $E_1 \oplus E_2 = \mathbb{R}^3$. $\boxed{1\text{pt}}$