Corrigé de la Série TD N° 05-06

1ere PARTIE : DYNAMIQUE D'UN POINT MATERIEL

EXERCICE D'APPLICATION DU COURS

Un bloc de masse m remonte le long d'un point incliné d'un angle α, par rapport à l'horizontale, avec une vitesse initiale v_0, et un coefficient de frottement f_d.

1. Déterminer jusqu'à quelle distance le bloc se déplace avant de s'arrêter.
2. Quelle est la valeur maximale que peut prendre le coefficient de frottement statique f_s pour que le corps puisse redescendre.
3. Pour une valeur du coefficient de frottement statique f_s inférieure à la valeur maximale trouvée dans la deuxième question, quelle est la vitesse v_1 du corps lorsqu'il revient à sa position de départ.

Corrigé de l'exercice

A t=0 ,$v=v_0$ et $\mu=f_d$

1-Cherchons la distance que peut parcourir le bloc avant

de s'arrêter

D'après le principe fondamental de la dynamique

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{p} + \vec{R} = m\vec{a}$$

La vitesse initiale $v_i= v_0$ et la vitesse finale $v_f=0$ (le corps va s'arrêter)

Nous avons $v_f^2 - v_i^2 = 2al$(l étant la distance parcourue par le corps)

Donc $a = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2l}$

Il faut choisir le repère, tel que l'axe (Ox) est suivant l'axe du mouvement, Donc il est parallèle à $\vec{f}$ et (Oy) est perpendiculaire à (Ox) donc parallèle à $\vec{N}$

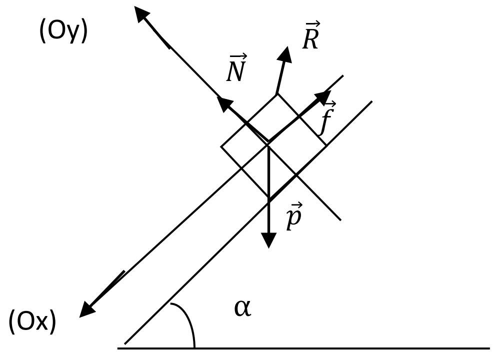
Suivant (Ox) – f- p_x= -f-m g sinα=ma

Suivant (Oy) $N-p_y=0 \Rightarrow N=m\,g\cos\alpha$

$f_d=tg\varphi=f/N \Rightarrow f=N\,tg\,\varphi$ donc $f= f_d\, m\,g\cos\alpha$

$- f_d\, m\,g\cos\alpha - m\,g\sin\alpha = ma \Rightarrow -f_d\, g\cos\alpha - g\sin\alpha=\frac{v_f^2-v_i^2}{2l}$

Donc $l = \frac{-v_i^2}{2(-f_d\ g\cos\alpha - g\sin\alpha)} = \frac{v_0^2}{2g(f_d\ \cos\alpha+ \sin\alpha)}$



2- La valeur maximale que peut prendre le coefficient de

frottement statique f_s pour le corps puisse redescendre,

-A l'équilibre

Suivant (Ox) $-f+ p_x=0 \Rightarrow f=m\,g\sin\alpha$

Suivant (Oy) $N-p_y=0 \Rightarrow N=m\,g\cos\alpha$

Pour que le corps puisse redescendre, il faut que $p_x>f$

$p_x>f \Rightarrow m\,g\sin\alpha>N\,f_s$ (*)

avec $f= N\,f_s$ et f_s est le coefficient de frottement statique pour lequel le corps commence son mouvement

(*)$\Rightarrow m\,g\sin\alpha> m\,g\cos\alpha\, f_s$ donc $f_s<tg\,\alpha$

La valeur maximale que peut prendre f_s est $tg\,\alpha$

3-La vitesse v_1 du corps lorsqu'il revient à sa position initiale

x=l, v_i=0 et on cherche v_f

$v_f^2 - v_i^2 = 2al$ l est la distance parcourue par le corps

Donc $a = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2l}$

Il faut choisir le repère, tel que l'axe (Ox) est suivant l'axe du mouvement, Donc il est parallèle et suivant p_x et l'axe (Oy) est perpendiculaire à (Ox) donc parallèle à $\vec{N}$

Suivant (Ox) $-f + p_x = -f + m\,g\,\sin\alpha = ma$

Suivant (Oy) $N - p_y = 0 \Rightarrow N = m\,g\,\cos\alpha$

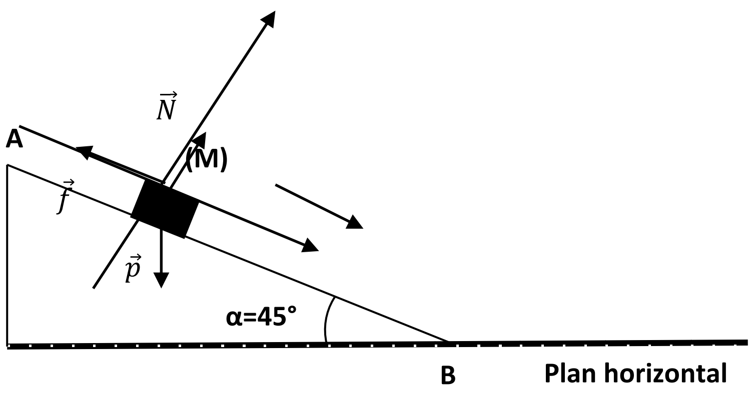
$f_d = tg\varphi = f/N \Rightarrow f = N\,tg\,\varphi$ donc $f = f_d\,m\,g\,\cos\alpha$

Alors $-f_d\,m\,g\,\cos\alpha + m\,g\,\sin\alpha = ma \Rightarrow -f_d\,g\,\cos\alpha + g\,\sin\alpha = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2l}$

$v_f^2 = 2gl(\sin\alpha - f_d\,\cos\alpha)$

<u>Corrigé des exercices de TD</u>

<u>EXERCICE 1</u>



v_A=1m/s et μ=0,5 sur AB

La nature du mouvement sur AB

$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{p} + \vec{N} + \vec{f} = m\vec{a}$

On choisit le repère, tel que l'axe (Ox) est suivant l'axe du mouvement parallèle à $\vec{f}$ et (Oy) est perpendiculaire à (Ox) donc suivant $\vec{N}$

Suivant (Ox) $-f + p_x = -f + m\,g\,\sin\alpha = ma$

Suivant (Oy) $N - p_y = 0 \Rightarrow N = m\,g\,\cos\alpha$

$\mu = tg\varphi = f/N \Rightarrow f = N\,tg\,\varphi$ donc $f = \mu\,m\,g\,\cos\alpha$

Alors $-\mu\,m\,g\,\cos\alpha + m\,g\,\sin\alpha = ma \Rightarrow a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$

$=10\ a = 10\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 0{,}5\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3{,}54\ m/s^2$

L'accélération a est constante et positive donc le mouvement est uniformément accéléré

La vitesse du point M lorsqu'il atteint le point B

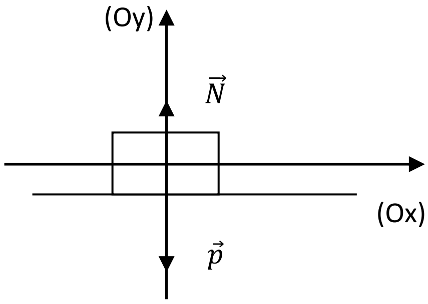
$v_B^2 - v_A^2 = 2al \Rightarrow v_B^2 = v_i^2 + 2al$

Avec l=AB=1

$v_B = \sqrt{1 + 2a} = 2{,}84\ m/s$

La nature du mouvement sur le plan horizontale

Les forces de frottement sont négligeables



$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{p} + \vec{N} = m\vec{a}$

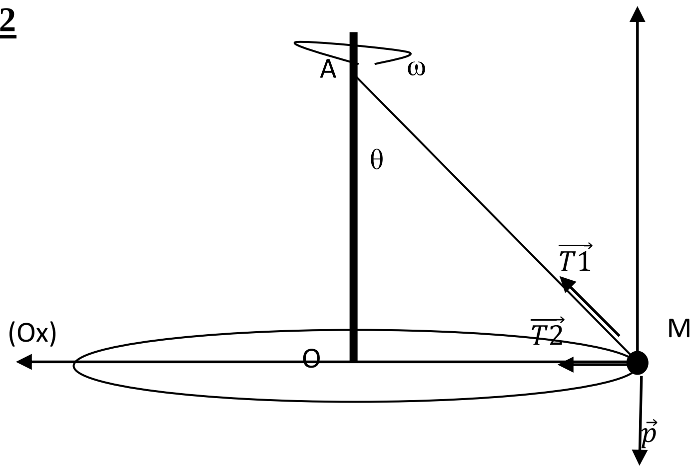
Sur Ox: 0=ma'

Sur Oy : N-p=0 $\Rightarrow N = p = mg$

Donc a'=0 alors le mouvement est uniforfme

-le mouvement est uniforme alors la vitesse est constante $v = v_B$ le bloc ne s'arretera pas

EXERCICE 2



1-Trouvons la force (tension du fil) que chaque fil exerce sur la boule.

D'après le principe fondamental de la dynamique

$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{p} + \overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{T_2} = m\vec{a}$

Le mouvement de la boule est circulaire donc l'accélération dans ce cas est l'accélération normale a_N qui est dirigé vers le centre du cercle (avec $a_N = v^2/R$)

On choisit le repère tel que

(Ox) est suivant l'accélération normale et il est dirigé vers le centre du cercle

(Oy) est perpendiculaire à (Ox)

Sur (Ox) $T_2 + T_1 \sin\theta = ma_N \Rightarrow T_2 + T_1 \sin\theta = m\frac{v^2}{R}$

Sur (Oy) $p - T_1 \cos\theta = 0 \Rightarrow mg = T_1 \cos\theta$

Donc $T_1 = \frac{mg}{cos\theta}$

$$T_2 = m\frac{v^2}{R} - T_1 \sin\theta = m\frac{v^2}{R} - \frac{mg}{cos\theta}\sin\theta$$

Donc $T_2 = m\frac{v^2}{R} - m\, g\, tg\,\theta$

La vitesse angulaire minimum ω_{min} pour laquelle le fil du bas reste tendu

Pour que le fil du bas reste tendu, il faut que $T_2 \geq 0$

$$T_2 = m\frac{v^2}{R} - m\, g\, tg\, \theta \geq 0 \Rightarrow \frac{v^2}{R} \geq g\, tg\, \theta$$

Avec $v=\omega R \Rightarrow \frac{\omega^2 R^2}{R} \geq g\, tg\, \theta$ avec R=OM=L

Donc $\omega^2 L \geq g\, tg\, \theta \Rightarrow \omega^2 \geq \frac{g\, tg\, \theta}{L}$

Et $\omega \geq \sqrt{\frac{g\, tg\, \theta}{L}}$ alors $\omega_{min} = \sqrt{\frac{g\, tg\, \theta}{L}}$

EXERCICE 3

1- la vitesse linéaire du corps.

L=30cm , 2α=60°.(α=30°) et ω=10 tr/mn.

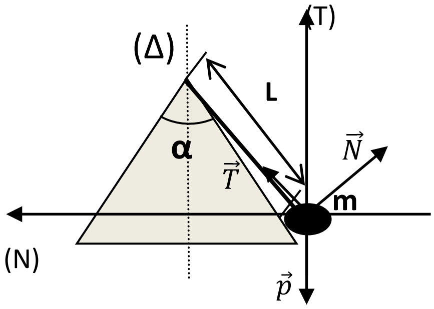
$$\begin{cases} 10x2\pi \longrightarrow 60\, s \\ \omega \longrightarrow 1s \end{cases} \Rightarrow \omega = \frac{10x2\pi}{60} = \frac{\pi}{3} rd/s$$

$v = \omega R$ et $R = l \sin\alpha$

Alors $v = \omega\, l \sin\alpha = \frac{\pi}{3} x0,3xsin\, 30 = 0,157 m/s$

Déterminons la réaction (N) de la surface du cône sur le corps et la tension du fil (T).

D'après le principe fondamental de la dynamique



$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{p} + \vec{N} + \vec{T} = m\vec{a}$$

On choisit un repère tel que (N) est suivant l'accélération normale et dirigé vers le centre du cône et l'axe (T) est perpendiculaire à (N)

sur (N) : $T_N - N_N = m\, a_N$ (*)

sur (T) : $T_T + N_T$ - p=m a_T=0 (car a_T=0, parce que la vitesse est constante)

$\Rightarrow \mathrm{T}\cos\alpha + \mathrm{N}\sin\alpha - \mathrm{p} = 0$

(*)$\Rightarrow$T sin α – N cos α= $\mathrm{m}\frac{v^2}{R}$=$\mathrm{m}\frac{\omega^2 R^2}{R}$

Donc $T = \frac{\mathrm{m}\omega^2\mathrm{R}}{\sin\alpha} + \mathrm{N}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

Onle remplace dans la deuxième équation

$$\left(\frac{\mathrm{m}\omega^2\mathrm{R}}{\sin\alpha} + \mathrm{N}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\cos\alpha + \mathrm{N}\sin\alpha - \mathrm{p} = 0$$

$$\mathrm{N}\left(\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} + \sin\alpha\right) = \mathrm{p} - \frac{\mathrm{m}\omega^2\mathrm{R}}{\sin\alpha}\cos\alpha \Rightarrow \mathrm{N}\left(\frac{1}{\sin\alpha}\right) = \frac{\mathrm{mg}\sin\alpha - \mathrm{m}\omega^2\mathrm{R}\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Donc N=m$(\mathrm{g}\sin\alpha - \omega^2\mathrm{R})$, En remplaçant R par l sinα , on aura

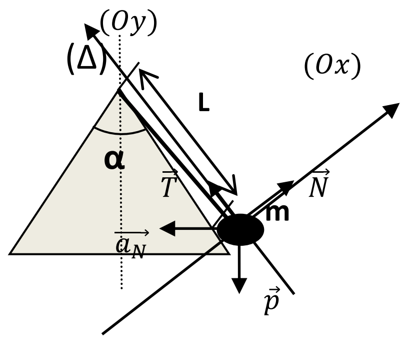
N=m$(\mathrm{g}\sin\alpha - \omega^2\mathrm{l}\sin\alpha\cos\alpha) = 7{,}92$ N

Alors $T = \frac{\mathrm{m}\omega^2\mathrm{l}\sin\alpha}{\sin\alpha} + \mathrm{N}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 5{,}88$ N

(si on remplace N par son expression, on trouve T=m g cos α +mω^2l $(1 - \cos^2\alpha)$

alors T= m g cos α +mω^2l $\sin^2\alpha$)

<u>Ou</u>



On peut choisir un autre repère. (Ox) est parallèle au fil dans le sens de $\vec{T}$ et (Oy) est perpendiculaire à (Ox), mais dans ce cas, il faut faire la projection du vecteurs accélération normale $\overrightarrow{a_N}$.

Sur (Ox) : N-p sin α $= -\mathrm{m}a_N\cos\alpha$ (*)

Sur (Oy) $T-p\cos\alpha=ma_N\sin\alpha$

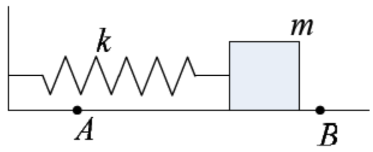
(*)$\Rightarrow N=p\sin\alpha-m\,a_N\cos\alpha=m\,g\sin\alpha-m\omega^2 l\sin\alpha\cos\alpha$

($a_N=\frac{v^2}{R}=\frac{\omega^2R^2}{R}$ et $R=l\sin\alpha$ alors $a_N=\omega^2 l\sin\alpha$)

Et $T=mg\cos\alpha+m\,\omega^2 l\sin^2\alpha$

2^{eme} PARTIE : TRAVAIL ET ENERGIE

EXERCICE 1



$\Delta Ec = \Sigma W_{f_{ext}} \Rightarrow Ec_B - Ec_A = W_p + W_T + W_N + W_f$

Donc $Ec_B = W_T + W_f$ (*) $Ec_A = 0$ *car la vitesse initiale est nulle*

Avec $W_T = \frac{1}{2}kx^2$ et $W_f = -f\ x$

D'après le principe fondamental de la dynamique

$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{N} + \vec{p} + \vec{T} + \vec{f} = m\vec{a}$

$\mu = tg\varphi = \frac{f}{N}$

On choisit un repère composés de l'axe (Ox) suivant l'axe de mouvement donc dans la même direction de $\vec{T}$ et l'axe (Oy) est suivant $\vec{N}$

En faisant la projection sur l'axe Oy

N-p=0$\Rightarrow$ $N = mg$ *et* $\mu = tg\varphi = \frac{f}{mg}$

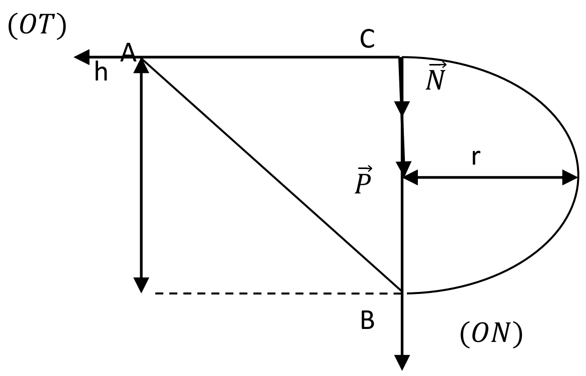
Alors f=mg tg φ

Donc (*)$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}kx^2 - $mg (tg φ)

Alors

$$v_B^2 = \frac{2}{m}\left(\frac{1}{2}kx^2 - \mathrm{mg\ x\ tg\ \varphi}\right)$$

EXERCICE 2



D’après le principe de la conservation de l’énergie mécanique :

- entre les deux points A et B

$E_{M_A} = E_{M_B} \Rightarrow E_{C_A} + E_{P_A} = E_{C_B} + E_{P_B}$

Alors $E_{P_A} = E_{C_B}$(*)

car$E_{C_A} = 0$ *puisque* $v_A = O$ *car la bille est lancée sans vitesse initiale et*

$E_{P_B} = 0$ *puisque* $E_{P_B} = mgh$ *et* $h = 0$

Donc (*)⇒ $mgh = \frac{1}{2}mv_B^2$

- entre les deux points B et C

$E_{M_B} = E_{M_C} \Rightarrow E_{C_B} + E_{P_B} = E_{C_C} + E_{P_C}$

Alors $E_{C_B} = E_{C_C} + E_{P_C}$

Donc $mgh = \frac{1}{2}mv_C^2 + 2mgr$ (*’)

La bille quitte la gouttière au point C quand N=0,

D’après le principe fondamental de la dynamique

$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{N} + \vec{p} = m\vec{a}$

On choisit un repère composés de l'axe (OT) tangent à la demi sphère et l'axe (ON) suivant le rayon et dans le sens de $\vec{N} et\ \vec{p}$

En faisant la projection sur l'axe ON

N+p=ma$_N$⇒ $N + mg = m\frac{v^2}{r}$

Au point C pour N=0 la vitesse sera

$mg = m\frac{v_C^2}{r} \Rightarrow v_C^2 = r\ g$

(*')⇒ $mgh_C = \frac{1}{2}mgr + 2mgr = \frac{5}{2}mgr$

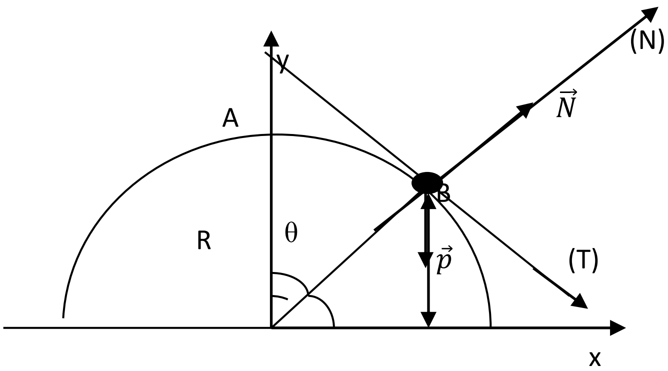
Alors $h_C = \frac{5}{2}r$

$h_C$est la valeur minimale pour laquelle la bille atteint le point C sans quitter la gouttière

Pour h<h_C la bille n'atteint pas le point C

Pour h>h_C la bille atteint le point C et quitte la gouttière

EXERCICE 3



1-D'après le principe de la conservation de l'énergiemécanique :

- entre les deux points A et B

$E_{M_A} = E_{M_B} \Rightarrow E_{C_A} + E_{P_A} = E_{C_B} + E_{P_B}$

Alors $E_{C_A} = E_{C_B} + E_{P_B}$

car$E_{C_A} = 0$ *puisque* $v_A =$
O *car le point matériel est lancée sans vitesse initiale*

avec$h_B = Rcos\theta$

Donc (*)$\Rightarrow$ $mgR = \frac{1}{2}mv_B^2$+ mg Rcos θ

Alors $gR = \frac{1}{2}v_B^2$+ g Rcosθ (*')$\Rightarrow v_B^2$= $2(gR - gRcos\theta)$

$$\Rightarrow v_B = \sqrt{2(gR - gRcos\theta)}$$

2-D'après le principe fondamental de la dynamique

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{N} + \vec{p} = m\vec{a}$$

On choisit un repère composés de l'axe (OT) tangent à la demi sphère et l'axe (ON) suivant le rayon et dans le sens de $\vec{N}$

En faisant la projection sur l'axe ON

N-p cosθ =ma$_N$$\Rightarrow N - mg\cos\theta = -m\frac{v^2}{r}$

3-Quand le point P quitte la sphère alors N=0

$mg\cos\theta = m\frac{v_p^2}{R} \Rightarrow v_p^2 = Rg\cos\theta$

(*')$\Rightarrow$ $R = \frac{1}{2}R\ g\cos\theta$+ g Rcos θ alors $cos\theta = \frac{2}{3}$

Donc $\theta_0 = 48°$

Le point matériel P quitte la sphère à une hauteur h$_p$=$\frac{2}{3}$ R

L'angle par rapport à l'horizontale pour lequel le point quitte la demi sphère est 90-48=52

4-La vitesse du point matériel en ce point

$$v_p^2 = Rg\cos\theta \Rightarrow v_p = \sqrt{\frac{2}{3}Rg}$$

(Les résultats trouvés sont les mêmes que ceux trouvés en utilisant le principe fondamentale de la dynamique)