CORRIGE DES EXERCICES DE LA SERIE TD N° 03 (2018/2019)

CINEMATIQUE D'UN POINT MATERIEL

EXERCICE 1

a- Nous avons $x(t)=2t^3+5t^2+5$donc :

-La visse serait

$v(t) = \frac{dx}{dt} = 6t^2+10t$

-l'accélération serait

$a(t)=\frac{dv(t)}{dt}=12t+10$

b- La position du corps, à l'instant **t_1=2s**, ainsi que sa vitesse et son accélération instantanée

La position

$x(2)= 2(2)^3+5(2)^2+5=41m$

La vitesse instantanée

$v(2)=6(2)^2+10(2)=44m/s$

L'accélération instantanée

$a(2)=12(2)+10=34m/s^2$

-La position du corps, à l'instant **t_2=3s**, ainsi que sa vitesse et son accélération instantanée

La position

$x(3)= 2(3)^3+5(3)^2+5=104m$

La vitesse instantanée

$v(3)=6(3)^2+10(3)=84m/s$

L'accélération instantanée

$a(3)=12(3)+10=46m/s^2$

c- On déduit la vitesse et l'accélération moyenne du corps entre t_1 et t_2

La vitesse moyenne

$$v_{moy} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} v_{moy} = \frac{104 - 41}{3 - 2} = 63m/s$$

L'accélération moyenne

$$a_{moy} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} a_{moy} = \frac{84 - 44}{3 - 2} = 40 m/s^2$$

EXERCICE 2

Les coordonnées d'un point mobile M dans le plan (oxy) s'écrivent

$x = t$, $y = t^2 - t$

a- L'équation de la trajectoire s'écrit alors

(Pour trouver l'équation de la trajectoire, il suffit de trouver la relation qui lie x(t) et y(t). Pour cela, on déduit le temps, d'une équation, de x(t) ou de y(t), et on le remplace dans l'autre équation)

Ici, on va écrire t en fonction, de x

$t=x$ donc $y = x^2 - x$

L'équation de la trajectoire est

$$\mathbf{y(x) = x^2 - x}$$

b- Les composantes de la vitesse et de l'accélération

- La vitesse :

$\overrightarrow{v(t)} = v_x(t)\vec{i} + v_y(t)\vec{j}$

$$\begin{cases} v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = 1 \\ v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt} = 2t - 1 \end{cases}$$

La vitesse s'écrit $\mathbf{\overrightarrow{v(t)} = \vec{i} + (2t - 1)\vec{j}}$

Le module de la vitesse $|\vec{v}(t)| = \sqrt{1 + (2t - 1)^2} = \sqrt{4t^2 - 4t + 2}$

-l'accélération

$\overrightarrow{a(t)} = a_x(t)\vec{i} + a_y(t)\vec{j}$

$$\begin{cases} a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} = 0 \\ a_y(t) = \frac{dv_y(t)}{dt} = 2 \end{cases}$$

L'accélération s'écrit $\mathbf{\overrightarrow{a(t)} = 2\vec{j}}$

Le module de l'accélération $|\vec{a}(t)| = 2$

c- les accélérations normales et tangentielles

-L’accélération tangentielle

$a_T = \frac{d|\overrightarrow{v(t)}|}{dt}$avec$|\overrightarrow{v(t)}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{4t^2 - 4t + 2}$

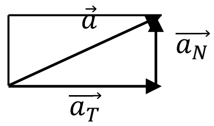
$$a_T = \frac{d\sqrt{4t^2 - 4t + 2}}{dt} = \frac{4t - 2}{\sqrt{4t^2 - 4t + 2}}$$

-L’accélération normale

Les accélérations $a_N$et $a_T$sont les composantes normales et tangentielles de l’accélération $\vec{a}$

$(\vec{a} = a_T\overrightarrow{U_T} + a_N\overrightarrow{U_N})$

Nous avons la forme d’un triangle droit, en appliquant la relation de Pitagort



$a^2 = a_T^2 + a_N^2$

Donc$a_N^2 = a^2 - a_T^2$

$$a_N^2 = 4 - \left(\frac{4t - 2}{\sqrt{4t^2 - 4t + 2}}\right)^2 = 4 - \frac{16t^2 - 16t + 4}{4t^2 - 4t + 2}$$

$$a_N^2 = \frac{4}{4t^2 - 4t + 2}$$

Donc $a_N = \frac{2}{\sqrt{4t^2 - 4t + 2}} = \frac{2}{v}$

Le rayon de courbure

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \frac{2}{v} \Rightarrow R = \frac{v^3}{2} = \frac{(4t^2 - 4t + 2)^{\frac{3}{2}}}{2}$$

EXERCICE 3

Les coordonnées d’un point mobile M dans le plan (oxy) s’écrivent

a- $\begin{cases} x = v_0 t \\ y = \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$ Où g est l’accélération de la pesanteur

L’équation de la trajectoire s’écrit alors

$t = x/v_0$ donc$y = \frac{1}{2} g \; \frac{x^2}{v_0^2}$

L’équation de la trajectoire est

$$\mathbf{y(x)} = \frac{1}{2} g \; \frac{x^2}{v_0^2}$$

b- Les composantes de la vitesse et de l’accélération

- La vitesse :

$\overrightarrow{\mathrm{v(t)}} = \mathrm{v_x(t)}\vec{\mathrm{i}} + \mathrm{v_y(t)}\vec{\mathrm{j}}$

$$\begin{cases} v_x(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} = v_0 \\ v_y(t) = \dfrac{dy(t)}{dt} = gt \end{cases}$$

La vitesse s'écrit $\overrightarrow{\mathbf{v(t)}} = v_0\vec{\mathbf{i}} + gt\vec{\mathbf{j}}$

Le module de la vitesse $|\vec{v}(t)| = \sqrt{v_0^2 + (gt)^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2}$

-l'accélération

$\overrightarrow{\mathrm{a(t)}} = \mathrm{a_x(t)}\vec{\mathrm{i}} + \mathrm{a_y(t)}\vec{\mathrm{j}}$

$$\begin{cases} a_x(t) = \dfrac{dv_x(t)}{dt} = 0 \\ a_y(t) = \dfrac{dv_y(t)}{dt} = g \end{cases}$$

L'accélération s'écrit $\overrightarrow{\mathbf{a(t)}} = \mathbf{g}\vec{\mathbf{j}}$

Le module de l'accélération $|\vec{a}(t)| = 2$

c- les accélérations normales et tangentielles

-L'accélération tangentielle

$a_T = \frac{d\left|\overrightarrow{v(t)}\right|}{dt}$avec$\left|\overrightarrow{v(t)}\right| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2}$

$$a_T = \frac{d\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}}{dt} = \frac{g^2t}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}}$$

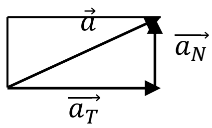
-L'accélération normale

Les accélérations $a_N$et $a_T$sont les composantes normales et tangentielles de l'accélération $\vec{a}$

$(\vec{a} = a_T\overrightarrow{U_T} + a_N\overrightarrow{U_N})$

Nous avons la forme d'un triangle droit, en appliquant la relation de Pitagort

$a^2 = a_T^2 + a_N^2$



Donc $a_N^2 = a^2 - a_T^2$

$$a_N^2 = g^2 - \left(\frac{g^2t}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}}\right)^2 = g^2 - \frac{g^4t^2}{v_0^2 + g^2t^2}$$

$$a_N^2 = \frac{g^2 v_0^2}{v_0^2 + g^2 t^2}$$

Donc $a_N = \frac{g v_0}{\sqrt{v_0^2+g^2t^2}} = \frac{g v_0}{v}$

Le rayon de courbure

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \frac{g v_0}{v} \Rightarrow R = \frac{v^3}{g v_0} = \frac{(v_0^2 + g^2 t^2)^{\frac{3}{2}}}{g v_0}$$

EXERCICE 4

a-cherchons l'équation de la trajectoire d'un corps dont le mouvement est définit par

$$v_x = \frac{t}{t^2+1} \quad et \quad v_y = t$$

Sachant qu'à t=0, x=0 et y=1

$\begin{cases} v_x = 1 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{t}{t^2+1} \\ \quad v_y = \frac{2}{t+1} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = t \end{cases}$ donc $\begin{cases} dx = dt \Rightarrow \int_0^x dx = \int_0^t \frac{t}{t^2+1} dt \quad (*) \\ dy = \frac{2}{t+1} dt \Rightarrow \int_1^y dy = \int_0^t t dt \quad (*') \end{cases}$

$$(*) \Rightarrow x = \frac{1}{2}\ln(t^2+1)$$

$$(*') \Rightarrow \quad y - 1 = \frac{t^2}{2} donc\ donc\ \ t^2 = 2(\,y-1)$$

En remplaçant t^2 par $2(\,y-1)$ on a l'équation de la trajectoire de la forme

$$x = \frac{1}{2}\ln(2y-2+1) = \frac{1}{2}\ln(2y-1)$$

donc

a- Les composantes de l'accélération

$$\begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d(\frac{t}{t^2+1})}{dt} = \frac{t^2+1-2t^2}{(t^2+1)^2} = \frac{1-t^2}{(t^2+1)^2} \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d(t)}{dt} = 1 \end{cases}$$

Donc $\overrightarrow{a(t)} = \frac{1-t^2}{(t^2+1)^2}\vec{\imath} + \vec{\jmath}$

Exercice 5

Un corps se déplace sur une droite avec une accélération telle que : $a=-kv^2$
Où k est une constante.
Si à $t=0$; $v=v_0$et $x=x_0$.

Nous cherchons d'abords la vitesse en fonction du temps

$$a = \frac{dv}{dt} = -kv^2 \Rightarrow \frac{dv}{v^2} = -kdt$$

Donc $\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v^2} = \int_0^t -kdt \Rightarrow \frac{-1}{v} + \frac{1}{v_0} = -kt \quad donc \quad \frac{1}{v} = kt + \frac{1}{v_0}$

Alors $\frac{1}{v} = \frac{ktv_0+1}{v_0}$ (*)

La vitesse s'écrit $v(t) = \frac{v_0}{ktv_0+1}$

Nous avons trouvé la vitesse, cherchant ensuite la position en fonction du temps

$v = \frac{dx}{dt} = \frac{v_0}{ktv_0+1}$donc $dx = \frac{v_0}{ktv_0+1}dt$

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t \frac{v_0}{ktv_0+1}dt \Rightarrow x - x_0 = \frac{1}{k}\ln(ktv_0+1)$$

La position en fonction du temps est de la forme $x(t) = x_0 + \frac{1}{k}\ln(ktv_0+1)$

La relation entre la vitesse et la position

(*)$\Rightarrow ktv_0 + 1 = \frac{v_0}{v} \quad donc\ x = x_0 + \frac{1}{k}\ln\frac{v_0}{v}$

$$ln\frac{v_0}{v} = k(x-x_0) \Rightarrow \frac{v_0}{v} = e^{k(x-x_0)}$$

Alors $v = v_0 e^{k(x_0-x)}$

Exercice 6

Une particule se déplace sur une trajectoire dont l'équation de la trajectoire est $y=x^2$ de telle sorte qu'à chaque instant $v_x=v_0=cst$. Si t=0, x_0, $y_0=0$.

a- Cherchons Les coordonnées x(t) et y(t) de la particule.

Nous avons suivant (Ox) :$v_x = v_0 = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_0^x dx = \int_0^t v_0 dt$

$\Rightarrow \boldsymbol{x(t)} = v_0 t$

D'autre part : y=x²$\Rightarrow y(t) = v_0^2 t^2$

Donc$\begin{cases} \boldsymbol{x(t)} = v_0 t \\ y(t) = v_0^2 t^2 \end{cases}$

b- La vitesse et l'accélération de la particule.

La vitesse

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} = v_0 \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} = 2v_0^2 t \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v(t)} = v_0 \vec{\imath} + 2v_0^2 t \vec{\jmath}$$

Le module de la vitesse $\left|\overrightarrow{v(t)}\right| = \sqrt{v_0^2 + 4v_0^4 t^2}$

L'accélération

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = 0 \\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = 2v_0^2 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v(t)} = 2v_0^2 \vec{\jmath}$$

Le module de l'accélération $\left|\overrightarrow{a(t)}\right| = 2v_0^2$

c- Les accélérations normale et tangentielle

L'accélération tangentielle

$$a_T = \frac{d\left|\overrightarrow{v(t)}\right|}{dt} = \frac{4v_0^4 t}{\sqrt{v_0^2 + 4v_0^4 t^2}}$$

L'accélération normale

$$a_N^2 = a^2 - a_T^2 \Rightarrow a_N^2 = 4v_0^4 - \frac{16v_0^8 t^2}{v_0^2 + 4v_0^4 t^2}$$

$$\Rightarrow a_N^2 = \frac{4v_0^6}{v_0^2 + 4v_0^4 t^2}$$

Donc

$$a_N = \frac{2v_0^3}{\sqrt{v_0^2 + 4v_0^4 t^2}} = \frac{2v_0^3}{v}$$

Le rayon de courbure

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \frac{2v_0^3}{v} \Rightarrow R = \frac{v^3}{2v_0^3}$$

Exercice 7

Les coordonnées x et y d'un point mobile M dans le plan (oxy) varient avec le temps t selon les relations suivantes : $\begin{cases} x(t) = r_0\cos(\omega t) \\ y(t) = r_0\sin(\omega t) \end{cases}$

Avec r_0 et ω des constantes. $\begin{cases} x^2(t) = {r_0}^2\cos^2(\omega t) \\ y^2(t) = {r_0}^2\sin^2(\omega t) \end{cases} \Rightarrow x^2(t) + y^2(t) =$ ${r_0}^2(\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t))$

Donc $x^2 + y^2 = {r_0}^2$

a- Les composantes de la vitesse et de l'accélération

- La vitesse :

$$\overrightarrow{\mathrm{v(t)}} = \mathrm{v_x(t)}\vec{\mathrm{i}} + \mathrm{v_y(t)}\vec{\mathrm{j}}$$

$$\begin{cases} v_x(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} = -r_0\omega\sin(\omega t) \\ v_y(t) = \dfrac{dy(t)}{dt} = r_0\omega\cos(\omega t) \end{cases}$$

La vitesse s'écrit $\overrightarrow{\mathbf{v(t)}} = -r_0\omega\sin(\omega t)\vec{\mathbf{i}} + r_0\omega\cos(\omega t)\vec{\mathbf{j}}$

Le module de la vitesse $|\vec{v}(t)| = \sqrt{{r_0}^2\omega^2\sin^2(\omega t) + {r_0}^2\omega^2\cos^2(\omega t)} = r_0\omega$

-l'accélération

$$\overrightarrow{\mathrm{a(t)}} = \mathrm{a_x(t)}\vec{\mathrm{i}} + \mathrm{a_y(t)}\vec{\mathrm{j}}$$

$$\begin{cases} a_x(t) = \dfrac{dv_x(t)}{dt} = -r_0\omega^2\cos(\omega t) \\ a_y(t) = \dfrac{dv_y(t)}{dt} = -r_0\omega^2\cos(\omega t) \end{cases}$$

L'accélération s'écrit $\overrightarrow{\mathbf{a(t)}} = -r_0\omega^2\cos(\omega t)\vec{\mathbf{i}} + -r_0\omega^2\cos(\omega t)\vec{\mathbf{j}}$

Le module de l'accélération $|\vec{a}(t)| = \sqrt{{r_0}^2\omega^4\cos^2(\omega t) + {r_0}^2\omega^4\sin^2(\omega t)}$=$r_0\omega^2$

Le mouvement est circulaire ($x^2 + y^2 = {r_0}^2$) uniforme (la vitesse est constante).

b- les accélérations normales et tangentielles

-L'accélération tangentielle

$a_T = \frac{d|\overrightarrow{v(t)}|}{dt}$avec$|\overrightarrow{v(t)}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = r_0\omega$

$$a_T = 0$$

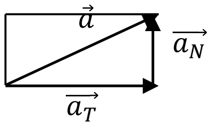
-L'accélération normale

Les accélérations $a_N$et $a_T$sont les composantes normales et tangentielles de l'accélération $\vec{a}$

$(\vec{a} = a_T\overrightarrow{U_T} + a_N\overrightarrow{U_N})$

Nous avons la forme d'un triangle droit, en appliquant la relation de Pitagort

$a^2 = a_T^2 + a_N^2$



Donc $a_N^2 = a^2 \Rightarrow a_N = a = r_0\omega^2$

Le rayon de courbure

$$a_N = \frac{v^2}{R} = r_0\omega^2 \Rightarrow R = \frac{v^2}{r_0\omega^2} = \frac{(r_0\omega)^2}{r_0\omega^2} = r_0$$