Série TD N° 02

CALCUL VECTORIEL - COORDONNEES

Exercice 1

$\vec{\imath},\ \vec{\jmath}\ et \vec{k}$ étant les vecteurs unitaires des axes rectangulaire Oxyz, on considère les vecteurs

$$\vec{r_1}=\vec{\imath}+3\vec{\jmath}-2\vec{k} \qquad \vec{r_2}=4\vec{\imath}-2\vec{\jmath}+2\vec{k} \qquad \text{et} \qquad \vec{r_3}=3\vec{\imath}-\vec{\jmath}+2\vec{k}$$

1. Représenter graphiquement ces 3 vecteurs.
2. Calculer leurs modules.
3. Calculer les produits $\vec{r_1}\cdot\vec{r_2}$ et $\vec{r_1}\wedge\vec{r_2}$, que représente ces deux produit ?

Exercice 2

On donne les trois vecteurs $\vec{V_1}(1, 1, 0)$, $\vec{V_2}(0, 1, 0)$ et $\vec{V_3}$ $(0, 0, 2)$.

1. Calculer les normes des trois vecteurs$\|\vec{V_1}\|$, $\|\vec{V_2}\|$et $\|\vec{V_3}\|$, en déduire les vecteurs unitaires $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ et $\vec{v_3}$ des directions $\vec{V_1}$, $\vec{V_2}$ et de $\vec{V_3}$ respectivement.

2. Calculer cos $(\widehat{\vec{v_1},\vec{v_2}})$, sachant que l'angle correspondant est compris entre 0 et π.

3. Calculer le produit mixte $\vec{v_1}.(\vec{v_2}\wedge\vec{v_3})$. Que représente ce produit ?

Exercice 3

On considère dans l'espace rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ les points A(2, 0,0), B(2, −2, 0) et C(2, 3, −1).

1. Calculer le produit vectoriel$\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}$
2. Calculer l'aire du triangle OAB.
3. Calculer le produit mixte $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$, En déduire le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs

Exercice 4

Soient les points M_1 (+1,+1,+1), M_2 (+2,+2,+1) et M_3 (+2,+1,0) ; calculer l'angle $\widehat{M_1M_2M_3}$ Déterminer l'équation du plan (p) passant par le point M_2 et perpendiculaire au vecteur $\vec{A}=3\vec{\imath}-2\vec{\jmath}+\vec{k}$

Exercice 5

Soit un vecteur $\vec{U}=(t\vec{\imath}+3\vec{\jmath})/(\sqrt{t^2+9})$

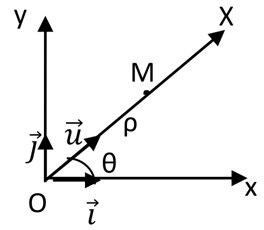
1. Montrer que $\vec{U}$ est un vecteur unitaire ?
2. Calculer sa dérivée par rapport au temps ?

Exercice 6

A) Un point matériel M est repéré par ses coordonnées cartésiennes (x,y).
1. Ecrire x et y en fonction des coordonnées polaires ρ et θ.
2. Donner l'expression du vecteur unitaire $\vec{u}$ en fonction des vecteurs unitaires $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.
3. Calculer $d\vec{u}/_{d\theta}$ que représente ce vecteur ?

B) Si la position du point M est donnée par $\begin{cases} \overrightarrow{OM} = t^2\vec{u} \\ \theta = \omega t \end{cases}$ (ωconstante).

Trouver l'expression du **vecteur vitesse** $\vec{v}$ en coordonnées polaires.



Exercice 7

Un point matériel M est repéré par ses coordonnées cartésiennes (x,y).

1. Ecrire la relation entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées polaires (x et y en fonction des coordonnées polaires ρ et θ)
2. Donner l'expression des vecteurs unitaires $\overrightarrow{u_\rho}$et $\overrightarrow{u_\theta}$ en fonction des vecteurs unitaires $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.
3. Trouver l'expression du vecteur vitesse $\vec{v}$ du point M en coordonnées polaires.
4. Donner l'expression du vecteur $\vec{A} = 2x\vec{\imath} - y\vec{\jmath}$ en coordonnées polaires.

Exercice 8

1. Trouver les relations reliant :
   - Les coordonnées cartésiennes et les coordonnées cylindriques.
   - Les coordonnées cartésiennes et les coordonnées sphériques.
2. Ecrire les vecteurs unitaires coordonnées cylindriques et sphériques en en fonction des vecteurs unitaires $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$
3. Trouver les déplacements élémentaires en coordonnées cylindriques et sphériques.
4. Calculer la surface et le volume de la sphère et du cylindre.
5. Ecrire $\vec{A} = 2x\vec{\imath} - 2z\vec{k}$ en coordonnées cylindriques.

EXERCICE SUPPLEMENTAIRE

La différentielle du vecteur $\vec{r}$, $d\vec{r} = d\vec{l} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k}$ peut se mettre en coordonnées cylindriques sous la forme $d\vec{r} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho}\, d\rho + \frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\, d\theta + \frac{\partial\vec{r}}{\partial z}\, dz$

1. Evaluer en utilisant les formules de passage entre les deux systèmes de coordonnées, les vecteurs $\frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho}$, $\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}$ et $\frac{\partial\vec{r}}{\partial z}$
2. En déduire les vecteurs unitaires $\overrightarrow{U_\rho}$, $\overrightarrow{U_\theta}$et $\overrightarrow{U_z}$(coordonnées cylindriques) en fonction de $\vec{\imath},\ \vec{\jmath}\ \ et\ \vec{k}$ (coordonnées cartésiennes), vérifier qu'ils sont orthogonaux.
3. Ecrire $\vec{A} = 2x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} - 2z\vec{k}$ en coordonnées cylindriques

Corrigé

Exercice III.6

On donne les trois vecteurs $\overrightarrow{V_1}(1, 1, 0)$, $\overrightarrow{V_2}(0, 1, 0)$ et $\overrightarrow{V_3}$ (0, 0, 2).

1. Calculer les normes $\|\overrightarrow{V_1}\|$, $\|\overrightarrow{V_2}\|$et $\|\overrightarrow{V_3}\|$:

Calculons les normes des différents vecteurs et les vecteurs unitaires de leurs directions respectives.

$$\|\overrightarrow{V_1}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2} \Longrightarrow \overrightarrow{v_1} = \frac{\overrightarrow{V_1}}{\|\overrightarrow{V_1}\|}; \;\; \overrightarrow{v_1}(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$$

$$\|\overrightarrow{V_2}\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} = 1 \Longrightarrow \overrightarrow{v_2} = \frac{\overrightarrow{V_2}}{\|\overrightarrow{V_2}\|} = \vec{j}\,; \;\; \overrightarrow{v_2}(0, 1, 0)$$

$$\|\overrightarrow{V_3}\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{4} = 2 \Longrightarrow \overrightarrow{v_3} = \frac{\overrightarrow{V_3}}{\|\overrightarrow{V_3}\|}; \;\; \overrightarrow{v_3}(0, 0, 1)$$

2. On calcule cos $(\widehat{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}})$ comme suit :

$$\overrightarrow{v_1}.\overrightarrow{v_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad et\ \overrightarrow{v_1}.\overrightarrow{v_2} = \|\overrightarrow{v_1}\|.\|\overrightarrow{v_2}\|.\cos(\widehat{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}})$$

$$\Rightarrow \cos\left(\widehat{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

3. Nous avons :

$$\overrightarrow{v_1}\,.\,\overrightarrow{v_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_3} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{\imath} + 0\vec{\jmath} + 0\vec{k} = \vec{\imath}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_3} = \vec{\imath}(1,0,0)$$

$$\overrightarrow{v_1}\,.\,(\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_3}) = 1 \times 1 + 1 \times 0 + 0 \times 0 = 1$$

- Le premier terme représente le produit scalaire entre les vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$, il est égal au produit du module de la projection de $\overrightarrow{v_1}$ sur $\overrightarrow{v_2}$ multiplié par le module de $\overrightarrow{v_2}$.
- Le deuxième terme est le produit vectoriel entre $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$.
- Le dernier terme est le produit mixte entre ($\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, $\overrightarrow{v_3}$) et qui n'est d'autre que le volume du parallélépipède construit sur la base des trois vecteurs.