Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen	A.U 2018/2019 - M.I 1ère année
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 1 - Fiche de T.D n°5

Exercice 1: Étudier la fonction

$$f(x) = \ln\left(x^2 - \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

puis tracer sa courbe représentative.

Exercice 2: (Transformation d'expression)

1. On considère l'expression $C(x) = a\cos x + b\sin x$ avec $a^2 + b^2 \neq 0$. Montrer qu'il existe A_1, ϕ_1, A_2, ϕ_2 tels que

$$C(x) = A_1\cos(x + \phi_1) = A_2\sin(x + \phi_2).$$

2. Considérons à présent la version hyperbolique $H(x) = a\cosh x + b\sinh x$ avec $|a| \neq |b|$. Montrer qu'il existe A_1, ϕ_1, A_2, ϕ_2 tels que, ou bien $H(x) = A_1\cosh(x+\phi_1)$, ou bien $H(x) = A_2\sinh(x + \phi_2)$.

Exercice 3: Montrer que

$$1 + \cosh x + \cosh 2x + \cdots + \cosh nx = \frac{1}{2} + \frac{\cosh nx - \cosh(n+1)x}{2(1 - \cosh x)}$$

Exercice 4: Vérifier que $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ on a $\sin(2t) = \dfrac{2\tan t}{1 + \tan^2 t}$. Montrer que $2\arctan(\frac{1}{3}) \in [0, \frac{\pi}{2}]$. En déduire enfin que $2\arctan(\frac{1}{3}) = \arcsin(\frac{3}{5})$.

Exercice 5: Étudier la fonction $g(x) = \arccos\left(\dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}\right)$, puis tracer son graphe. A l'aide de la dérivée de g trouver une autre expression (plus simple) de g.

Exercice 6: En passant aux dérivées, établir que

$$\arcsin(\tanh x) = \arctan(\sinh x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 7: Résoudre l'équation

$$\arctan x + \arctan(2x) = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 8: On considère le polynôme $P(t) = 16t^3 + 24t^2 + 9t + 1$. A l'aide d'une racine évidente, factoriser complètement ce polynôme. On donne la fonction

$$F(x) = argsh\left(3x + 4x^3\right).$$

En passant à sa dérivée et en utilisant la première question, donner une expression plus simple de $F(x)$.

Exercice 1 : Etude et graphe de f telle que $f(x) = \ln(x^2 - \sqrt{x^2-1})$

$D_f = \{x \in \mathbb{R},\ x^2 - 1 \geq 0 \text{ et } x^2 - \sqrt{x^2-1} > 0\}$.

$x^2 - 1 \geq 0 \iff x^2 \geq 1 \iff x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

$\forall x \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[,\ x^2 - \sqrt{x^2-1} > 0 \iff x^2 > \sqrt{x^2-1}$

$\iff x^4 > (\sqrt{x^2-1})^2 \iff x^4 > x^2 - 1 \iff x^4 - x^2 + 1 > 0$

$\iff X^2 - X + 1 > 0$

$\uparrow$
$X = x^2 \qquad \Delta = 1 - 4 = -3$

donc $\forall x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[,\ x^2 - \sqrt{x^2-1} > 0$

ou encore (autre méthode)

$\forall x \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[,\ x^2 - \sqrt{x^2-1} = \dfrac{(x^2 - \sqrt{x^2-1})(x^2 + \sqrt{x^2-1})}{x^2 + \sqrt{x^2+1}}$

$= \dfrac{x^4 - x^2 + 1}{x^2 + \sqrt{x^2-1}}$

$= \dfrac{\overbrace{x^2(x^2-1)}^{\geq 0} + 1 \geq 1}{\underbrace{x^2 + \sqrt{x^2+1}}_{> 0}}$

Donc $\forall x \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[,\ x^2 - \sqrt{x^2-1} > 0$

Par suite $D_f =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

$\forall x \in D_f,\ -x \in D_f$ et $f(-x) = \ln((-x)^2 - \sqrt{(-x)^2 - 1}) = \ln(x^2 - \sqrt{x^2-1}) = f(x)$

f est donc paire, il suffit de l'étudier sur $[1, +\infty[$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \ln(\underset{\downarrow 1}{x^2} - \underset{\downarrow 0}{\sqrt{x^2-1}}) = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(\underset{\downarrow +\infty}{x^2} - \underset{\downarrow +\infty}{\sqrt{x^2-1}}) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(\underset{\downarrow +\infty}{x}(\underset{\downarrow +\infty}{x} - \underset{\downarrow 1}{\sqrt{1 - \tfrac{1}{x^2}}})) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x^2(1 - \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4}}))}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 2\underbrace{\dfrac{\ln x}{x}}_{\to 0} + \dfrac{\overbrace{\ln(1 - \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4}})}^{\to 0}}{\underbrace{x}_{\to +\infty}} = 0$

Donc la courbe admet une branche parabolique de direction asymptotique $x'ox$

$\forall x \in]1, +\infty[,\ f'(x) = \dfrac{2x - \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2 - \sqrt{x^2-1}}$.

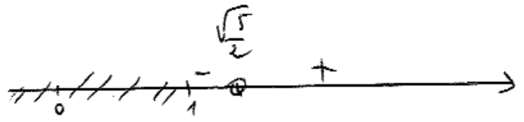
f non dérivable en 1 car $x \longmapsto \sqrt{x^2-1}$ non dérivable en 1.

$\forall x \in]1, +\infty[,\ x^2 - \sqrt{x^2-1} > 0$. Donc $f'(x)$ est de même signe que $2x - \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} = x\left(2 - \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)$

$x \geq 1$ donc $f'(x)$ est de même signe que $2 - \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

$2 - \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{2\sqrt{x^2-1} - 1}{\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{(2\sqrt{x^2-1} - 1)(2\sqrt{x^2-1} + 1)}{\sqrt{x^2-1}\,(2\sqrt{x^2-1} + 1)} = \dfrac{4x^2 - 4 - 1}{\sqrt{x^2-1}\,(2\sqrt{x^2-1} + 1)} = \dfrac{4x^2 - 5}{\underbrace{\sqrt{x^2-1}}_{> 0}\,\underbrace{(2\sqrt{x^2-1} + 1)}_{> 0}}$

$4x^2 - 5 = 0 \iff x = \pm \dfrac{\sqrt{5}}{2}$



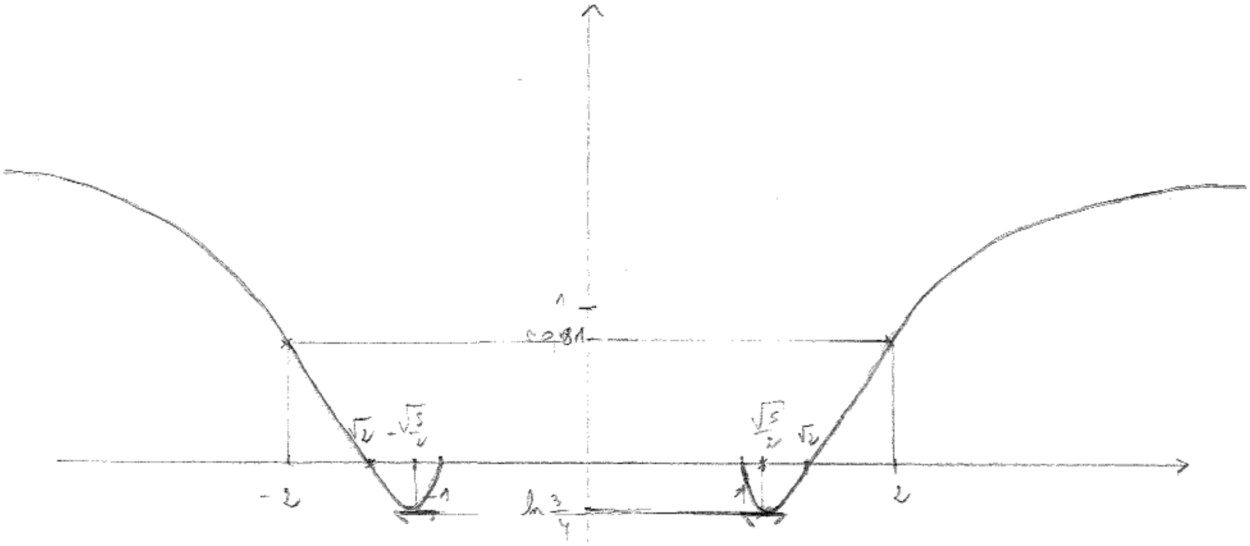
signe de $f'(x)$

x	1		$\frac{\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\ln\left(\frac{3}{4}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = \ln\left(\frac{5}{4} - \sqrt{\frac{5}{4} - 1}\right) = \ln\left(\frac{5}{4} - \frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{3}{4}\right) \simeq -0,28.$$

$$f(x) = 0 \iff \ln\left(x^2 - \sqrt{x^2-1}\right) = 0 \iff x^2 - \sqrt{x^2-1} = 1 \iff x^2 - 1 = \sqrt{x^2-1}$$

$$\iff \begin{cases} x^2-1 = 0 \\ \text{ou} \\ x^2 - 1 = 1 \end{cases} \iff \begin{matrix} x = 1 \\ \text{ou} \\ x = \sqrt{2} \end{matrix} \quad \text{car } x \geq 1$$



<u>Exercice 2</u> : 1) $C(x) = a\cos x + b\sin x$ avec $a^2+b^2 \neq 0$.

<u>1ère méthode (longue !!)</u>

i) Si $a=0$ et $b\neq 0$, $C(x) = b\sin x = b\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
$= A_1\cos(x+\phi_1) = A_2 \sin(x+\phi_2)$

avec $A_1 = A_2 = b$, $\phi_1 = -\frac{\pi}{2}$, $\phi_2 = 0$.

ii) Si $a \neq 0$ et $b = 0$, $C(x) = a\cos x = a\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
$= A_1 \cos(x+\phi_1) = A_2\sin(x+\phi_2)$

avec $A_1 = A_2 = a$, $\phi_1 = 0$ et $\phi_2 = \frac{\pi}{2}$

iii) Si $a\neq 0$ et $b \neq 0$, posons $R = \sqrt{a^2+b^2}$

$$C(x) = R\left(\frac{a}{R}\cos x + \frac{b}{R}\sin x\right)$$

$|a| = \sqrt{a^2} \underset{b\neq 0}{<} \sqrt{a^2+b^2}$ et $|b| = \sqrt{b^2} \underset{a \neq 0}{<} \sqrt{a^2+b^2}$

d'où $\dfrac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}} < 1$ et $\dfrac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}} < 1$

c-à-d $-1 < \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} < 1$ et $-1 < \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} < 1$

En posant $A = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $B = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, on voit que $A^2+B^2 = 1$

Donc $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}$, $\cos\alpha = A$ et $\sin\alpha = B$

Par suite
$$\begin{aligned} C(x) &= a\cos x + b\sin x \\ &= R(A\cos x + B\sin x) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\alpha\cos x + \sin\alpha\sin x) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\,\cos(x-\alpha) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\,\sin\left(x-\alpha+\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\,\sin\left(x+\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \end{aligned}$$

Finalement : $C(x) = a\cos x + b\sin x$

$= A_1\cos(x+\phi_1)$ avec $A_1 = \sqrt{a^2+b^2}$ et $\phi_1 = -\alpha$ où α est tel que $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

De même que $C(x) = A_2\sin(x+\phi_2)$ avec $A_2 = \sqrt{a^2+b^2}$ et $\phi_2 = \frac{\pi}{2}-\alpha$ où α est tel que $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

<u>Attention !</u> On n'a pas nécessairement $\alpha = \arccos\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \arcsin\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

En effet : si $a=1$ et $b=-1$, $\arccos\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\pi}{4}$

alors que $\arcsin\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{4}$

2ème méthode $\quad C(x) = a\cos x + b\sin x$.

$$A_1\cos(x+\phi_1) = A_1(\cos x\cos\phi_1 - \sin x\sin\phi_1)$$
$$= A_1\cos\phi_1\cos x - A_1\sin\phi_1\sin x.$$

$$C(x) = A_1\cos(x+\phi_1) \iff a\cos x + b\sin x = A_1\cos\phi_1\cos x - A_1\sin\phi_1\sin x$$

Par identification : $\begin{cases} a = A_1\cos\phi_1 \\ \text{et} \\ b = -A_1\sin\phi_1 \end{cases}$

Donc $a^2+b^2 = A_1^2\cos^2\phi_1 + A_1^2\sin^2\phi_1 = A_1^2(\cos^2\phi_1+\sin^2\phi_1) = A_1^2$

Par suite $A_1 = \sqrt{a^2+b^2}$ ou $A_1 = -\sqrt{a^2+b^2}$

Si $A_1 = \sqrt{a^2+b^2}$ alors $\cos\phi_1 = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\phi_1 = \dfrac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Si $A_1 = -\sqrt{a^2+b^2}$ alors $\cos\phi_1 = \dfrac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\phi_1 = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\forall a\in\mathbb{R}^*, \forall b\in\mathbb{R}^*$, $a^2+b^2 > a^2$ et $a^2+b^2 > b^2 \implies \sqrt{a^2+b^2} > |a|$ et $\sqrt{a^2+b^2} > |b|$

$$\underset{a^2+b^2\neq 0}{\overset{}{\Longrightarrow}} \underbrace{\frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{\alpha} < 1 \text{ et } \underbrace{\frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{\beta} < 1.$$

De plus $\alpha^2+\beta^2 = 1$ donc $\exists\,\phi_1\in\mathbb{R}$, $\cos\phi_1 = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $\left(\text{resp } \dfrac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ et $\sin\phi_1 = \dfrac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $\left(\text{resp. } \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

Donc $\exists\,\phi_1, A_1\in\mathbb{R}$, $a\cos x + b\sin x = A_1\cos(x+\phi_1)$

2) $H(x) = a\,\mathrm{ch}\,x + b\,\mathrm{sh}\,x$ avec $|a|\neq|b|$ c-à-d $a^2-b^2\neq 0$.

2-1 $\quad A_1\,\mathrm{ch}(x+\phi_1) = A_1\,\mathrm{ch}\,x\,\mathrm{ch}\,\phi_1 + A_1\,\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{sh}\,\phi_1$

$$H(x) = A_1\,\mathrm{ch}(x+\phi_1) \iff a\,\mathrm{ch}\,x + b\,\mathrm{sh}\,x = A_1\,\mathrm{ch}\,\phi_1\,\mathrm{ch}\,x + A_1\,\mathrm{sh}\,\phi_1\,\mathrm{sh}\,x$$

Par identification $\begin{cases} a = A_1\,\mathrm{ch}\,\phi_1 \\ b = A_1\,\mathrm{sh}\,\phi_1 \end{cases}$

Ainsi $a^2-b^2 = A_1^2(\mathrm{ch}^2\phi_1 - \mathrm{sh}^2\phi_1)$

$= A_1^2$

i) Si $a^2-b^2<0$ alors $\underbrace{A_1^2}_{\geq 0} \neq \underbrace{a^2-b^2}_{<0}$ et $\forall \phi_1, A_1 \in \mathbb{R}$, $a\,\mathrm{ch}\,x + b\,\mathrm{sh}\,x \neq A_1\,\mathrm{ch}(x+\phi_1)$

ii) Si $a^2-b^2>0$ alors $A_1 = \sqrt{a^2-b^2}$ ou $A_1 = -\sqrt{a^2-b^2}$.

Mais $a = A_1\,\mathrm{ch}\,\phi_1$ et $\mathrm{ch}\,\phi_1 \geq 1 > 0$. Donc A_1 est de même signe que a.

Par suite : $a>0 \Rightarrow A_1 = \sqrt{a^2-b^2} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{ch}\,\phi_1 = \dfrac{a}{A_1} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2-b^2}} & (\geq 1 \text{ facile à vérifier!}) \\ \mathrm{sh}\,\phi_1 = \dfrac{b}{A_1} = \dfrac{b}{\sqrt{a^2-b^2}} \end{cases}$

$a<0 \Rightarrow A_1 = -\sqrt{a^2-b^2} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{ch}\,\phi_1 = \dfrac{a}{A_1} = \dfrac{-a}{\sqrt{a^2-b^2}} & (\geq 1 \text{ facile à vérifier!}) \\ \mathrm{sh}\,\phi_1 = \dfrac{b}{A_1} = \dfrac{-b}{\sqrt{a^2-b^2}} \end{cases}$

(Remarque : si $a=0$ $(b\neq 0)$ alors $a^2-b^2 = -b^2 < 0$ donc voir cas 2.1. i))

2.2. $A_2\,\mathrm{sh}(x+\phi_2) = A_2\,\mathrm{sh}\,\phi_2\,\mathrm{ch}\,x + A_2\,\mathrm{ch}\,\phi_2\,\mathrm{sh}\,x$

$H(x) = A_2\,\mathrm{sh}(x+\phi_2) \iff a\,\mathrm{ch}\,x + b\,\mathrm{sh}\,x = A_2\,\mathrm{sh}\,\phi_2\,\mathrm{ch}\,x + A_2\,\mathrm{ch}\,\phi_2\,\mathrm{sh}\,x$

Par identification $\begin{cases} a = A_2\,\mathrm{sh}\,\phi_2 \\ b = A_2\,\mathrm{ch}\,\phi_2 \end{cases} \Rightarrow b^2-a^2 = A_2^2$

i) Si $b^2-a^2<0$ alors $\underbrace{A_2^2}_{\geq 0} \neq \underbrace{b^2-a^2}_{<0}$ et $\forall \phi_2, A_2 \in \mathbb{R}$, $a\,\mathrm{ch}\,x + b\,\mathrm{sh}\,x \neq A_2\,\mathrm{sh}(x+\phi_2)$

ii) Si $b^2-a^2>0$ alors $A_2 = \sqrt{b^2-a^2}$ ou $A_2 = -\sqrt{b^2-a^2}$

Mais $b = A_2\,\mathrm{ch}\,\phi_2$ et $\mathrm{ch}\,\phi_2 \geq 1 > 0$. Donc A_2 est de même signe que b.

Par suite $b>0 \Rightarrow A_2 = \sqrt{b^2-a^2} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{ch}\,\phi_2 = \dfrac{b}{A_2} = \dfrac{b}{\sqrt{b^2-a^2}} & (\geq 1) \\ \mathrm{sh}\,\phi_2 = \dfrac{a}{A_2} = \dfrac{a}{\sqrt{b^2-a^2}} \end{cases}$

$b<0 \Rightarrow A_2 = -\sqrt{b^2-a^2} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{ch}\,\phi_2 = \dfrac{b}{A_2} = \dfrac{-b}{\sqrt{b^2-a^2}} & (\geq 1) \\ \mathrm{sh}\,\phi_2 = \dfrac{a}{A_2} = \dfrac{-a}{\sqrt{b^2-a^2}} \end{cases}$

$\left(b=0 \Rightarrow a\neq 0 \Rightarrow b^2-a^2=-a^2<0 \text{ donc voir } 2.2.\ i)\right)$

<u>Finalement:</u> $|a|\neq|b| \Rightarrow \begin{cases} a^2-b^2>0 \\ \text{ou bien} \\ b^2-a^2>0 \end{cases}$

$\exists A_1, A_2, \Phi_1, \Phi_2$ tels que

$$\begin{cases} a^2-b^2>0 \Rightarrow H(x)=a\,\mathrm{ch}\,x+b\,\mathrm{sh}\,x = A_1\,\mathrm{ch}(x+\Phi_1) \neq A_2\,\mathrm{sh}(x+\Phi_2) \\ a^2-b^2<0 \Rightarrow H(x)=a\,\mathrm{ch}\,x+b\,\mathrm{sh}\,x = A_2\,\mathrm{sh}(x+\Phi_2) \neq A_1\,\mathrm{ch}(x+\Phi_1) \end{cases}$$

c-à-d. $\exists A_1, A_2, \Phi_1, \Phi_2$ tels que $H(x)=A_1\,\mathrm{ch}(x+\Phi_1)$ ou bien $H(x)=A_2\,\mathrm{sh}(x+\Phi_2)$

<u>Exercice 3:</u> Montrons que:

$$\underbrace{\underset{\overset{\parallel}{\mathrm{ch}\,0x}}{1}+\mathrm{ch}\,x+\mathrm{ch}\,2x+\dots+\mathrm{ch}\,nx}_{A_n} = \underbrace{\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{ch}\,nx-\mathrm{ch}(n+1)x}{2(1-\mathrm{ch}\,x)}}_{B_n}$$

<u>1ère méthode</u>, Raisonnement par récurrence.

i) Pour $n=0$, $\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{ch}\,0x-\mathrm{ch}(0+1)x}{2(1-\mathrm{ch}\,x)} = \frac{1}{2}+\frac{1-\mathrm{ch}\,x}{2(1-\mathrm{ch}\,x)} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

(ou encore: pour $n=1$:

$$\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{ch}\,x-\mathrm{ch}\,2x}{2(1-\mathrm{ch}\,x)} = \frac{1}{2}+\frac{\mathrm{ch}\,x-\mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x}{2(1-\mathrm{ch}\,x)} \quad \text{car } \mathrm{ch}\,2x=\mathrm{ch}^2x+\mathrm{sh}^2x$$

$$\underset{\mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x=1}{=} \frac{1}{2}+\frac{\mathrm{ch}\,x-\mathrm{ch}^2x+1-\mathrm{ch}^2x}{2(1-\mathrm{ch}\,x)}$$

$$= \frac{1}{2}+\frac{\mathrm{ch}\,x(1-\mathrm{ch}\,x)+(1-\mathrm{ch}\,x)(1+\mathrm{ch}\,x)}{2(1-\mathrm{ch}\,x)}$$

$$= \frac{1}{2}+\frac{\mathrm{ch}\,x+1+\mathrm{ch}\,x}{2}$$

$$= 1+\mathrm{ch}\,x \quad)$$

ii) Supposons $A_n = B_n$ pour n fixé.

iii) Montrons que $A_{n+1} = B_{n+1}$.

$$A_{n+1} = 1 + \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} 2x + \dots + \operatorname{ch} nx + \operatorname{ch}(n+1)x = A_n + \operatorname{ch}(n+1)x$$

$$= B_n + \operatorname{ch}(n+1)x$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{ch} nx - \operatorname{ch}(n+1)x}{2(1-\operatorname{ch} x)} + \operatorname{ch}(n+1)x$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{ch} nx - \operatorname{ch}(n+1)x + 2\operatorname{ch}(n+1)x - 2\operatorname{ch} x \operatorname{ch}(n+1)x}{2(1-\operatorname{ch} x)}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{ch} nx + \operatorname{ch}(n+1)x - 2\operatorname{ch} x \operatorname{ch}(n+1)x}{2(1-\operatorname{ch} x)}$$

Or : $\operatorname{ch}\alpha \operatorname{ch}\beta = \dfrac{\operatorname{ch}(\alpha+\beta) + \operatorname{ch}(\alpha-\beta)}{2}$

Donc $\operatorname{ch} x \operatorname{ch}(n+1)x = \dfrac{\operatorname{ch}(x+nx+x) + \operatorname{ch}(nx+x-x)}{2} = \dfrac{\operatorname{ch}(n+2)x + \operatorname{ch} nx}{2}$

et $A_n + \operatorname{ch}(n+1)x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\operatorname{ch} nx + \operatorname{ch}(n+1)x - \operatorname{ch}(n+2)x - \operatorname{ch} nx}{2(1-\operatorname{ch} x)}$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{ch}(n+1)x - \operatorname{ch}(n+2)x}{2(1-\operatorname{ch} x)}$$

$$= B_{n+1}$$

Par suite : $A_{n+1} = B_{n+1}$

iv) $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 + \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} 2x + \dots + \operatorname{ch} nx = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\operatorname{ch} nx - \operatorname{ch}(n+1)x}{2(1-\operatorname{ch} x)}$

<u>2ème méthode</u> : Calcul direct :

$$1 + \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} 2x + \dots + \operatorname{ch} nx = 1 + \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} + \dots + \frac{e^{nx} + e^{-nx}}{2}$$

$$= \frac{1 + e^x + e^{2x} + \dots + e^{nx} + 1 + e^{-x} + e^{-2x} + \dots + e^{-nx}}{2}$$

$$1+e^{x}+e^{2x}+\dots+e^{nx} = (e^{x})^{0}+(e^{x})^{1}+(e^{x})^{2}+\dots+(e^{x})^{n}$$

$$= \frac{1-(e^{x})^{n+1}}{1-e^{x}} = \frac{1-e^{(n+1)x}}{1-e^{x}}$$

$$1+e^{-x}+e^{-2x}+\dots+e^{-nx} = \frac{1-(e^{-x})^{n+1}}{1-e^{-x}} = \frac{1-e^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}}$$

Donc $1+\operatorname{ch}x+\operatorname{ch}2x+\dots+\operatorname{ch}nx = \dfrac{1-e^{(n+1)x}}{2(1-e^{x})}+\dfrac{1-e^{-(n+1)x}}{2(1-e^{-x})}$

$$= \frac{(1-e^{-x})(1-e^{(n+1)x})+(1-e^{x})(1-e^{-(n+1)x})}{2(1-e^{x})(1-e^{-x})}$$

$$= \frac{1-e^{(n+1)x}-e^{-x}+e^{nx}+1-e^{-(n+1)x}-e^{x}+e^{-nx}}{2(1-e^{-x}-e^{x}+1)}$$

$$= \frac{2-e^{-x}-e^{x}-e^{(n+1)x}-e^{-(n+1)x}+e^{nx}+e^{-nx}}{2(2-e^{-x}-e^{x})}$$

$$= \frac{1}{2}+\frac{\dfrac{e^{nx}+e^{-nx}}{2}-\dfrac{e^{(n+1)x}+e^{-(n+1)x}}{2}}{2\left(1-\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2}+\frac{\operatorname{ch}nx-\operatorname{ch}(n+1)x}{2(1-\operatorname{ch}x)}$$

<u>Exercice 4:</u> $\forall t\in\mathbb{R}$, $\dfrac{2\tan t}{1+\tan^{2}t} = \dfrac{2\frac{\sin t}{\cos t}}{1+\frac{\sin^{2}t}{\cos^{2}t}} = \dfrac{2\sin t\cos t}{\cos^{2}t+\sin^{2}t} = 2\sin t\cos t$

$= \sin 2t$

Montrons que: $2\arctan\frac{1}{3}\in[0,\frac{\pi}{2}]$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\arctan x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Posons $\arctan \frac{1}{3} = X$. $X \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$$\tan\left(\arctan \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \iff \tan X = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 0 < \tan X \leq \frac{1}{3} < 1 = \tan \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow 0 < X < \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow 0 < 2X < \frac{\pi}{2}$$

$$\iff 0 < 2\arctan \frac{1}{3} < \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow 2\arctan\frac{1}{3} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\subset \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Par suite : $\sin\left(2\arctan \frac{1}{3}\right) = \dfrac{2\tan\left(\arctan\frac{1}{3}\right)}{1+\tan^2\left(\arctan\frac{1}{3}\right)}$

$$= \frac{2/3}{1+\frac{1}{3^2}}$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{3^2}{1+3^2} = \frac{2\times 3}{10} = \frac{3}{5}$$

Donc $\arcsin\Big(\sin\big(\underbrace{2\arctan\tfrac{1}{3}}_{\in [0, \frac{\pi}{2}]}\big)\Big) = \arcsin\frac{3}{5}$

c-à-d. $2\arctan \frac{1}{3} = \arcsin \frac{3}{5}$

(car $\arcsin(\sin\alpha) = \alpha$ si $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$)

<u>Exercice 5</u> : $g(x) = \arccos\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

$D_g = \left\{x \in \mathbb{R},\ -1 \leq \dfrac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1\right\}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $1-x^2 \leq 1+x^2 \iff \forall x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1$

$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2+1 \geq x^2-1 \iff \dfrac{x^2-1}{x^2+1} \leq 1$

$\iff \dfrac{1-x^2}{1+x^2} \geq -1$

Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leq \dfrac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1$ et $D_g = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ -x \in \mathbb{R}$ et $g(-x) = \arccos\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right) = g(x)$

g est paire, il suffit de l'étudier sur $[0, +\infty[$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \arccos\left(\underbrace{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}_{\substack{\downarrow x \to +\infty \\ -1}}\right) = \arccos(-1) = \pi$

Donc la droite d'équation $y = \pi$ est asymptote à C_g, courbe représentative de g

$g(0) = \arccos 1 = 0$

$g'(x) = ?$

Posons $u(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

$u^2(x) = 1 \iff u(x) = 1$ ou $u(x) = -1 \iff 1-x^2 = 1+x^2$ ou $\underbrace{1-x^2 = -1-x^2}_{\text{impossible}}$

$\iff x = 0$

$\forall x \in]0, +\infty[,\ g'(x) = -\dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$

$u'(x) = \dfrac{-2x(1+x^2) - 2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$

$= \dfrac{-4x}{(1+x^2)^2}$

Donc $g'(x) = \dfrac{\overset{>0}{4x}}{\underbrace{(1+x^2)^2\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}}_{>0}} = \dfrac{4x}{(1+x^2)^2\sqrt{\dfrac{(1+x^2)^2-(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}}}$

$= \dfrac{4x}{(1+x^2)\sqrt{1+2x^2+x^4-1+2x^2-x^4}} = \dfrac{4x}{(1+x^2)\sqrt{4x^4}}$

$$g'(x) = \frac{4x}{(1+x^2)\,2x} \qquad \text{car } x>0$$

$$= \frac{2}{1+x^2}$$

g est-elle dérivable à droite de 0 ?

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) - 0}{x} \qquad \text{f.i. } \frac{0}{0}$$

$\forall x \in]0,+\infty[$, g continue sur $[0,x]$, dérivable sur $]0,x[$.

D'après le th. des accroissements finis, $\exists c \in]0,x[$, $g'(c) = \dfrac{g(x)-g(0)}{x}$

D'où $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} g'(c)$

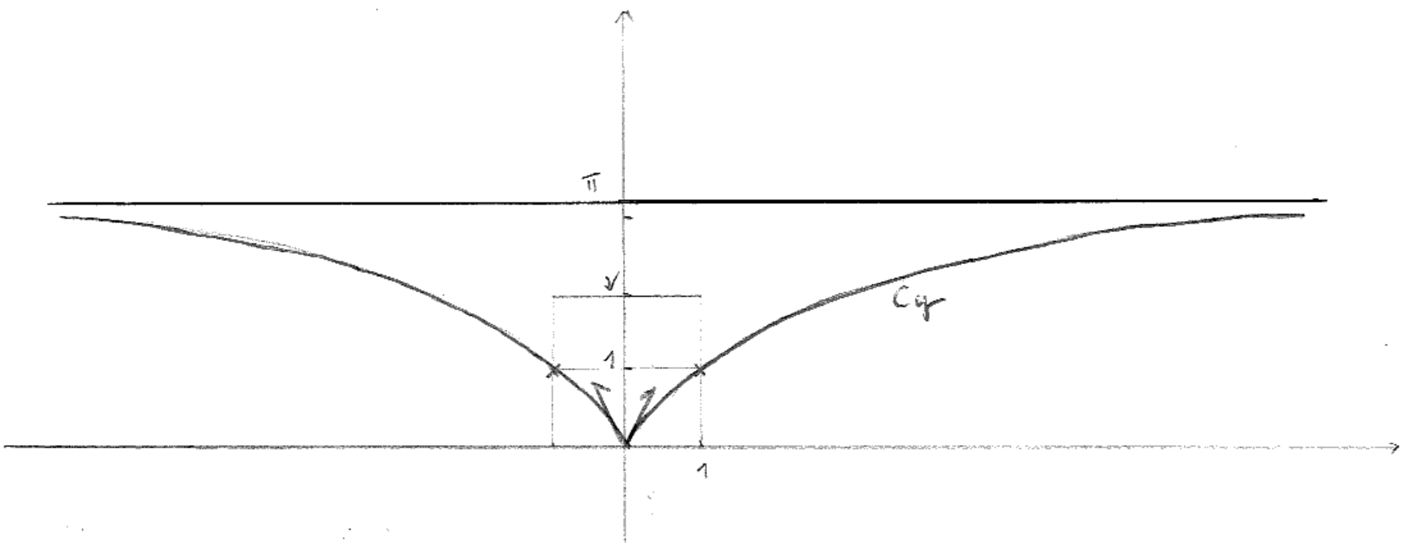
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{1+c^2} \qquad \text{car } c \in]0,x[$$

$$\overset{0<c<x}{=} \lim_{c\to 0^+} \frac{2}{1+c^2} \qquad (\text{car } x\to 0^+ \Rightarrow c\to 0^+$$

$$= 2$$

Donc $g'_d(0) = 2$. Finalement, on peut écrire : $\begin{cases} \forall x \in]0,+\infty[,\ g'(x) = \dfrac{2}{1+x^2} \\ \text{et} \\ g'_d(0) = 2 \end{cases}$

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$0 \nearrow \pi$



$\forall x \in]0,+\infty[\,,\ g'(x) = \dfrac{2}{1+x^2} \Rightarrow \forall x \in]0,+\infty[\,,\ g(x) = 2\,\mathrm{Arctan}\, x + C$

En particulier pour $x=1$, on a : $g(1) = 2\,\mathrm{Arctan}\,1 + C$ c-à-d $\arccos 0 = 2\,\mathrm{Arctan}\,1 + C$

Donc $\frac{\pi}{2} = 2\frac{\pi}{4} + C$ soit $C=0$ et $\forall x \in]0,+\infty[\,,\ g(x) = 2\,\mathrm{Arctan}\, x$

Finalement : $\forall x \in]0,+\infty[\,,\ g(x) = 2\,\mathrm{Arctan}\, x$
et
$g(0)=0$

Donc $\forall x \in [0,+\infty[\,,\ g(x) = 2\,\mathrm{Arctan}\, x$

Par ailleurs : $\forall x \in]-\infty,0]\,,\ \exists y \in [0,+\infty[\,, x=-y$ d'où $g(x) = g(-y) \overset{g \text{ paire}}{=} g(y)$

$y>0 \rightarrow \ = 2\,\mathrm{Arctan}\, y$

$= 2\,\mathrm{Arctan}(-x)$

$= 2\,\mathrm{Arctan}\,|x|$

<u>Conclusion.</u> $\left.\begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R}^+,\ g(x) = 2\,\mathrm{Arctan}\, x \\ \forall x \in \mathbb{R}^-,\ g(x) = 2\,\mathrm{Arctan}\,|x| \end{array}\right\} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 2\,\mathrm{Arctan}\,|x|$

<u>Exercice 6</u> : Posons $g(x) = \arcsin(\tanh x)$ et $h(x) = \arctan(\sinh x)$

$\tanh : \mathbb{R} \to]-1,1[$ $\quad \arctan : \mathbb{R} \longrightarrow]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ $\quad \sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

$\forall x \in \mathbb{R},\ \tanh x \in]-1,1[\subset [-1,1]$ et $\sinh x \in \mathbb{R}$.

$D_g = \{x \in \mathbb{R},\ -1 \leq \tanh x \leq 1\} = \mathbb{R}$

$D_h = \{x \in \mathbb{R},\ \sinh x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \dfrac{\tanh' x}{\sqrt{1-\tanh^2 x}}$ $\quad$ ($\forall x \in \mathbb{R}$, $\tanh x \in]-1,1[$ donc $1-\tanh^2 x \neq 0$)

$= \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x \sqrt{\frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}}}$

$= \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x \ \frac{1}{\mathrm{ch}\, x}}$ $\quad$ car $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}\, x > 0$

$= \dfrac{1}{\mathrm{ch}\, x}$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = \frac{sh'(x)}{1+sh^2 x}$$
$$= \frac{ch x}{ch^2 x}$$
$$= \frac{1}{ch x}$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = h'(x)$. Par suite $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = h(x) + C$ où C est une constante

En particulier pour $x = 0$, on obtient $g(0) = h(0) + C$

c-à-d. $C = g(0) - h(0)$

$$= \arcsin(\tanh 0) - \arctan(\sinh 0)$$
$$= \arcsin(0) - \arctan 0$$
$$= 0$$

Finalement $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = h(x)$

Exercice 7. Résolvons l'équation : $\arctan x + \arctan 2x = \frac{\pi}{4}$.

$$\arctan x + \arctan 2x = \frac{\pi}{4} \implies \tan(\arctan x + \arctan 2x) = \tan\frac{\pi}{4}$$
$$\iff \frac{\tan(\arctan x) + \tan(\arctan 2x)}{1 - \tan(\arctan x)\tan(\arctan 2x)} = 1$$
$$\iff \frac{x + 2x}{1 - x.2x} = 1$$
$$\iff \frac{3x}{1-2x^2} = 1$$
$$\iff 3x = 1 - 2x^2$$
$$\iff 2x^2 + 3x - 1 = 0$$

$\Delta = 9 + 8 = 17$.

$$x_1 = \frac{-3-\sqrt{17}}{4} \quad \text{ou} \quad x_2 = \frac{-3+\sqrt{17}}{4}$$

$x_1 < 0 \Rightarrow 2x_1 < 0 \Rightarrow \arctan x_1 < 0$ et $\arctan 2x_1 < 0$

$\Rightarrow \arctan x_1 + \arctan 2x_1 < 0$

$\Rightarrow \arctan x_1 + \arctan 2x_1 \neq \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow x_1$ n'est pas solution de l'équation donnée.

$x_2 = \frac{-3+\sqrt{17}}{4} \Rightarrow 0 < x_2 < \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2} < 1$

$\Rightarrow 0 < 2x_2 < 1$

$$\Rightarrow 0 < \arctan \underset{<1}{\underbrace{x_2}} + \arctan \underset{<1}{\underbrace{2x_2}} \overset{\arctan \nearrow}{<} \arctan 1 + \arctan 1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \arctan x_2 + \arctan 2x_2 = \arctan\Big(\underbrace{\tan\big(\overbrace{\arctan x_2 + \arctan 2x_2}^{\in\,]0, \frac{\pi}{2}[}\big)}_{=1}\Big)$$

$\Rightarrow \arctan x_2 + \arctan 2x_2 = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

Donc x_2 est la seule solution de l'équation donnée.

Exercice 8 $\quad P(t) = 16t^3 + 24t^2 + 9t + 1$

$P(-1) = -16 + 24 - 9 + 1 = 0$

$P(t) = (t+1)\, Q(t)$

$$\begin{array}{r|l} 16t^3 + 24t^2 + 9t + 1 & t+1 \\ \cline{2-2} 16t^3 + 16t^2 \quad\quad\quad\;\; & 16t^2 + 8t + 1 \\ \hline 8t^2 + 9t + 1 & \\ 8t^2 + 8t \quad\; & \\ \hline t + 1 & \\ t + 1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$P(t) = (t+1)(16t^2 + 8t + 1)$

$= (t+1)(4t+1)^2$

$F(x) = \text{argsh}(3x + 4x^3)$ $\quad\left(\text{Argsh}' x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right)$

$$F'(x) = \frac{3+12x^2}{\sqrt{1+(3x+4x^3)^2}}$$

$$= \frac{3+12x^2}{\sqrt{1+9x^2+24x^4+16x^6}}$$

$$= \frac{3(1+4x^2)}{\sqrt{(x^2+1)(4x^2+1)^2}}$$

$$= \frac{3(1+4x^2)}{(1+4x^2)\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{1+x^2}} \implies F(x) = 3 \text{ Argsh } x + C$$

$$\implies F(0) = 3 \text{ Argsh } 0 + C$$

$$\iff \text{Argsh } 0 = 3 \text{ Argsh } 0 + C$$

$$\iff C = -2 \text{ Argsh } 0 = 0.$$

Donc $\underline{\underline{F(x) = 3 \text{ Argsh } x.}}$