Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen	A.U 2018/2019 - M.I 1ère année
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 1 - Fiche de T.D n°4

Exercice 1: Soient a, b, c des paramètres réels. On considère les fonctions

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ ax^2 + bx + c & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \sqrt{x - x^2[x^2]}$$

Étudier la dérivabilité de ces deux fonctions sur leurs domaines respectifs.

Exercice 2: Calculer la dérivée d'ordre n de chacune des fonctions suivantes :

$$R(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \quad , \quad M(x) = xe^{ax}$$

Exercice 3: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction ln dans l'intervalle $[n, n+1]$, montrer que

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}.$$

En déduire que la suite

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 4: Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]0,1[$ avec $f'(x) \neq 0$ sur $]0,1[$ et $f(0) = 0$. On veut montrer que f ne change pas de signe.

1. En appliquant le théorème des accroissements finis sur $[0,1]$, montrer que $f(1) \neq 0$.
2. Supposons que $f(1) > 0$ et qu'il existe $x_0 \in]0,1[$ tel que $f(x_0) < 0$. Montrer alors qu'il existe $x_1 \in]0,1[$ tel que $f(x_1) = 0$.
3. En appliquant de nouveau le théorème des accroissements finis dans $[0, x_1]$, montrer qu'on aboutit à une contradiction avec les hypothèses, puis conclure.
4. Refaire le même travail avec $f(1) < 0$.(Facultatif)

Exercice 5: A l'aide de la formule de Taylor-Lagrange, montrer que $\forall x \geq 0$ on a

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1+x)^3} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

Exercice 6: Étudier puis tracer le graphe de la fonction donnée par

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{|x|}\right)^{|x|}$$

Exercice 1 : 1) a, b, c paramètres réels

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ ax^2+bx+c & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$D_f = \mathbb{R}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}^{*-}$ et $\forall x \in \mathbb{R}^{*-}$, $f'(x) = e^x$

f " sur $\mathbb{R}^{*+}$ et $\forall x \in \mathbb{R}^{*+}$, $f'(x) = 2ax+b$.

f est-elle dérivable en 0 ?

A gauche,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{e^x - e^0}{x-0}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$ donc f est dérivable à gauche de 0 et $f'_g(0) = 1$

A droite :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{ax^2+bx+c-1}{x}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} ax+b+\frac{c-1}{x} = \begin{cases} b & \text{si } c = 1 \\ \infty & \text{si } c \neq 1 \end{cases}$$

Donc f est dérivable à droite de 0 si $c = 1$ et $f'_g(0) = b$.

Finalement : f dérivable en 0 ssi $\begin{cases} c = 1 \\ \text{et} \\ f'_d(0) = f'_g(0) \end{cases}$ c-à-d $\begin{cases} c = 1 \\ \text{et} \\ b = 1 \end{cases}$

2) $g(x) = \sqrt{x - x^2[x^2]}$

$D_g = \{x \in \mathbb{R},\ x - x^2[x^2] \geq 0\}$

$x - x^2[x^2] \geq 0 \iff x \geq \underset{\substack{\uparrow \\ x^2 \geq 0 \\ [x^2] \geq 0}}{x^2[x^2] \geq 0} \Rightarrow x \geq 0$. Donc $D_g \subset [0, +\infty[$

Soit $x \geq 0$.

$x^2 \geq 0 \Rightarrow 0 \leq [x^2] = m$.

$x - x^2[x^2] \geq 0 \iff x - x^2 m \geq 0 \iff x(1 - mx) \geq 0$

Signe de $x - x^2 m$

$-mx^2 + x = 0 \iff x(-mx + 1) = 0 \iff \cancel{\begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = \frac{1}{m} \end{cases}}$ Attention ! m est peut-être nul

1er cas : $m = 0$

$m = 0 \iff [x^2] = 0 \iff 0 \leq x^2 < 1 \underset{x \geq 0}{\iff} 0 \leq x < 1$

Dans ce cas $x - x^2[x^2] = x$ et $g(x) = \sqrt{x}$

2e cas : $m \neq 0 \underset{\substack{m = [x^2] \geq 0 \\ m \in \mathbb{N}}}{\iff} m \geq 1 \iff \begin{cases} m \in \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}^* \\ \text{et} \\ 1 \leq x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{m} \leq 1 \\ \text{et} \\ 1 \leq x \end{cases}$ (1)

$-mx^2 + x = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = \frac{1}{m} \end{cases}$

x		0		$1/m$	
Signe de $-mx^2 + x$	$-$	0	$+$	0	$-$

$x - x^2[x^2] \geq 0 \iff 0 \leq x \leq \frac{1}{m} \leq 1$ (2)

$\left.\begin{matrix} (1) \\ \text{et} \\ (2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq x \\ \text{et} \\ x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow x = 1$

Dans ce cas $x^2 - x^2[x^2] = 0$.

Conclusion : $x - x^2[x^2] \geq 0 \iff \begin{cases} 0 \leq x < 1 \\ \text{ou} \\ x = 1 \end{cases} \iff 0 \leq x \leq 1$

Donc $D_g = [0, 1]$

$g : [0, 1] \to \mathbb{R}$
$x \mapsto g(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

g est-elle dérivable sur $[0, 1]$?

Soit $x_0 \in [0, 1[$: $\lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}$

$= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x_0}} & \text{si } x_0 \neq 0 \\ +\infty & \text{si } x_0 = 0 \end{cases}$$

Donc g est dérivable sur $]0,1[$ et $\forall x \in]0,1[$, $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

g est-elle dérivable à gauche de $x_0 = 1$?

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{\overbrace{\sqrt{x}}^{\to 1}}{\underbrace{x-1}_{\to 0^-}} = -\infty$$

$$\xrightarrow[\quad 1 \quad]{-\quad +} \; x-1$$

Donc g n'est pas dérivable à gauche de 1.

Exercice 2 : 1) $R(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$

$D_R = \{x\in\mathbb{R},\ cx+d \neq 0\}$

$cx+d=0 \iff cx=-d$

i) Si $c=0$ et $d=0$ alors $\forall x\in\mathbb{R}$, $cx+d=0$ et $D_R = \emptyset$

ii) Si $c=0$ et $d\neq 0$ alors $\forall x\in\mathbb{R}$, $cx+d = d \neq 0$, $D_R = \mathbb{R}$

et $R(x) = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$. D'où $\forall x \in \mathbb{R}$, $R'(x) = \frac{a}{d}$

$R''(x) = 0$,

c.à.d. $\forall n \geq 2$, $R^{(n)}(x) = 0$

iii) Si $c\neq 0$, alors $cx+d=0 \iff x = -\frac{d}{c}$ d'où $D_R = \mathbb{R} - \{-\frac{d}{c}\}$

$\forall x \in \mathbb{R}-\{-\frac{d}{c}\}$, $R'(x) = \frac{a(cx+d)-c(ax+b)}{(cx+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

$$R''(x) = (ad-bc)\,\frac{-2c\,(cx+d)}{(cx+d)^4}$$

$$= -2c\,(ad-bc)\,\frac{1}{(cx+d)^3}$$

$$R^{(3)}(x) = -2c\,(ad-bc)\,\frac{-3c\,(cx+d)^2}{(cx+d)^6}$$

$$= 2.3.c^2(ad-bc)\,\frac{1}{(cx+d)^4}$$

$$R^{(4)}(x) = 2.3.c^2(ad-bc)\,\frac{-4c(cx+d)^3}{(cx+d)^8}$$

$$= -2.3.4\,c^3(ad-bc)\,\frac{1}{(cx+d)^5}$$

<u>Formule de récurrence</u>: $\overbrace{R^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} n!\, c^{n-1}(ad-bc)\frac{1}{(cx+d)^{n+1}}}^{P(n)}$

i) Pour $n=1$, $R^{(1)}(x) = R'(x) = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

$P(1)$ est vérifiée.

ii) Supposons $P(n)$ vraie pour n fixé.

iii) Montrons que $P(n+1)$ reste vraie

$$R^{(n+1)}(x) = \left(R^{(n)}\right)'(x) = (-1)^{n+1} n!\, c^{n-1}(ad-bc)\,\frac{-(n+1)c\,(cx+d)^n}{(cx+d)^{2n+2}}$$

$$= (-1)^{n+2}(n+1)!\,c^n(ad-bc)\,\frac{1}{(cx+d)^{n+2}}$$ cqfd.

iv) $\forall n \geq 1$, $R^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} n!\, c^{n-1}(ad-bc)\,\dfrac{1}{(cx+d)^{n+1}}$

2) $M(x) = x e^{ax}$

$D_M = \mathbb{R}$. i) $a=0 \Rightarrow M(x) = x \Rightarrow M'(x) = 1 \Rightarrow \forall n \geq 2,\ M^{(n)}(x) = 0$

ii) $a \neq 0$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $M'(x) = e^{ax} + ax\,e^{ax}$

$= (1+ax)\,e^{ax}$

$M''(x) = a\,e^{ax} + a(1+ax)\,e^{ax}$

$= (a^2x + 2a)\,e^{ax}$

$M^{(3)}(x) = a^2 e^{ax} + a(a^2x + 2a)\,e^{ax}$

$= (a^3x + 3a^2)\,e^{ax}$

Formule de récurrence, $M^{(n)}(x) = (a^n x + n a^{n-1}) e^{ax}$.

i) Pour $n=1$, $M'(x) = (ax+1)e^{ax}$.

ii) Supposons que pour n fixé, $M^{(n)}(x) = (a^n x + n a^{n-1}) e^{ax}$

iii) Montrons que $M^{(n+1)}(x) = (a^{n+1} x + (n+1) a^n) e^{ax}$.

$$M^{(n+1)}(x) = (M^{(n)})'(x) = a^n e^{ax} + a(a^n x + n a^{n-1}) e^{ax}$$

$$= (a^{n+1} x + (n+1) a^n) e^{ax}$$

iv) $\forall n \geq 1$, $M^{(n)}(x) = (a^n x + n a^{n-1}) e^{ax}$.

Exercice 3 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Appliquons le théorème des accroissements finis à : $f : [n, n+1] \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto f(x) = \ln x$.

f est continue sur $[n, n+1]$, dérivable sur $]n, n+1[$, et $\forall x \in]n, n+1[$, $f'(x) = \frac{1}{x}$

Donc : $\exists c \in]n, n+1[$, $f'(c) = \frac{f(n+1) - f(n)}{n+1 - n}$

$\Leftrightarrow \exists c_n \in]n, n+1[$, $\frac{1}{c} = \ln(n+1) - \ln n$

Or $n < c < n+1$

donc $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{n}$

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n} \quad (*)$$

Montrons que $U_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$ est convergente.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n+2}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}\right)$

$= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}$

$> \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{2}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} = 0$

$2n+1 < 2n+2$
$\frac{1}{2n+1} > \frac{1}{2n+2}$

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante. (1)

D'autre part, d'après la question précédente,

$(*) \Rightarrow$

$$\frac{1}{n+1} < \ln(\cancel{n+1}) - \ln n$$

$$\frac{1}{n+2} < \cancel{\ln(n+2)} - \cancel{\ln(n+1)}$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{2n-1} < \cancel{\ln(2n-1)} - \cancel{\ln(2n-2)}$$

$$\frac{1}{2n} = \frac{1}{n+n} < \ln(2n) - \cancel{\ln(2n-1)}$$

$$u_n < \ln(2n) - \ln n = \ln\left(\frac{2n}{n}\right) = \ln 2$$

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée. (2)

(1) et (2) $\Rightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée $\Rightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge

D'autre part : $(*) \Rightarrow \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}$

Donc

$$\cancel{\ln(n+2)} - \ln(n+1) < \frac{1}{n+1}$$

$$\cancel{\ln(n+3)} - \cancel{\ln(n+2)} < \frac{1}{n+2}$$

$$\cancel{\ln(n+4)} - \cancel{\ln(n+3)} < \frac{1}{n+3}$$

$$\vdots$$

$$\ln(2n+1) - \cancel{\ln(2n)} < \frac{1}{2n}$$

$$\ln(2n+1) - \ln(n+1) < u_n$$

Finalement,

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) < u_n < \ln 2$

$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) \leq \lim_{n \to +\infty} u_n \leq \ln 2$

$\Rightarrow \ln 2 \leq \lim_{n \to +\infty} u_n \leq \ln 2$ d'où $\lim_{n \to +\infty} u_n = \ln 2$

<u>Exercice 4</u> $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue
dérivable sur $]0,1[$

$f(0) = 0$ et $\forall x \in]0,1[, \ f'(x) \neq 0$.

1) En utilisant le th. des accroissements finis, montrons que $f(1) \neq 0$.

$\left.\begin{array}{l} f \text{ continue sur } [0,1] \\ \text{dérivable sur }]0,1[\end{array}\right\} \Rightarrow \exists c \in]0,1[, \ f'(c) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} \underset{f(0)=0}{=} f(1)$

or $\forall x \in]0,1[, \ f'(x) \neq 0$ et $c \in]0,1[$, donc $f'(c) \neq 0$ c-à-d $f(1) \neq 0$.

2) $\left.\begin{array}{l} f(1) > 0 \\ \exists x_0 \in]0,1[, \ f(x_0) < 0 \\ f \text{ continue sur } [x_0,1] \subset [0,1] \end{array}\right\}$

En vertu du th. des valeurs intermédiaires, $\exists x_1 \in]x_0,1[, \ f(x_1) = 0$

Donc $\exists x_1 \in]0,1[, \ f(x_1) = 0$.

3) $\left.\begin{array}{l} f \text{ continue sur } [0,x_1] \\ \text{dérivable sur }]0,x_1[\end{array}\right\} \underset{\text{Th. des A.F}}{\Rightarrow} \exists c_0 \in]0,x_1[, \ f'(c) = \frac{f(x_1)-f(0)}{x-0}$

$= \frac{f(x_1)}{x} = 0$

Absurde car $\forall x \in]0,1[, \ f'(x) \neq 0$

<u>Conclusion</u>: Une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, dérivable sur $]0,1[$ telle que $f(0) = 0$ et $\forall x \in]0,1[, \ f'(x) \neq 0$, ne change pas de signe

8/10

Exercice 5 : Montrons que $\forall x \geq 0$, $\underbrace{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1+x)^3} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}}_{(*)}$

1°/ Si $x = 0$, $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1+x^3)} = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} = 0$

donc $(*)$ est triviale

2°/ Si $x > 0$, posons $f : [0, x] \longrightarrow \mathbb{R}$
$t \longmapsto f(t) = \ln(1+t)$

$f \in C^2([0, x])$, $\forall t \in [0, x]$, $f'(t) = \frac{1}{1+t}$ $\quad f'(0) = 1$

$f''(t) = \frac{-1}{(1+t)^2}$ $\quad f''(0) = -1$

De plus $\forall t \in [0, x)$, $f^{(3)}(t) = \frac{2(1+t)}{(1+t)^4} = \frac{2}{(1+t)^3}$ donc f'' dérivable sur $]0, x[$

Les hypothèses nécessaires à la formule de Taylor - Lagrange sont vérifiées, par suite $\exists c \in]0, x[$, $f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f^{(3)}(c)$

c-à-d. $\exists c \in]0, x[$, $\ln(1+x) = 0 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} \frac{2}{(1+c)^3}$

$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1+c)^3}$

$0 < c < x$

$1 < (1+c)^3 < (1+x)^3$

$\frac{1}{(1+x)^3} < \frac{1}{(1+c)^3} < 1$

$\frac{x^3}{3(1+x)^3} < \frac{x^3}{3(1+c)^3} < \frac{x^3}{3}$ d'où $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1+x)^3} < \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1+c)^3} < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

Exercice 6. Etude et graphe de f telle que : $f(x)=\left(1+\frac{1}{|x|}\right)^{|x|}$

$D_f=\mathbb{R}^*$.

$\forall x\in\mathbb{R}^*,\ -x\in\mathbb{R}^*$ et $f(-x)=\left(1+\frac{1}{|-x|}\right)^{|-x|}=\left(1+\frac{1}{|x|}\right)^{|x|}=f(x)$

f est donc paire, il suffit de l'étudier sur $[0,+\infty[$

$\forall x\in[0,+\infty[,\ f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=e^{x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}=e^{x(\ln(x+1)-\ln x)}$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+} e^{x\ln(x+1)-x\ln x}$$

$\lim\limits_{x\to0^+} x\ln(x+1)=0$ et $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x=0$

Donc $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=e^0=1$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\underset{x=\frac{1}{X}}{=}\lim_{X\to0^+}\frac{\ln(1+X)}{X}=1$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=e^1=e$. Par suite la droite d'éq. $y=e$ est asymptote à C_f, courbe représentative de f.

$$\forall x\in\mathbb{R}^*,\ f'(x)=\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+x\,\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}\right)e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$=\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right)e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$f'(x)$ est de même signe que $g(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}$ sur $\mathbb{R}^{*+}$.

$$\forall x\in\mathbb{R}^{*+},\ g'(x)=\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}+\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$=-\frac{1}{x^2+x}+\frac{1}{(x+1)^2}$$

$\forall x \in \mathbb{R}^{*+}$, $g'(x) = -\dfrac{1}{x(x+1)} + \dfrac{1}{(x+1)^2}$

$= \dfrac{-x-1+x}{x(x+1)^2} = -\dfrac{1}{x(x+1)^2} < 0$ car $x > 0$

$\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \underbrace{\ln\Big(\underbrace{1+\frac{1}{x}}_{\to +\infty}\Big)}_{\to +\infty} - \underbrace{\frac{1}{x+1}}_{\to 1} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \underbrace{\ln\Big(\underbrace{1+\frac{1}{x}}_{\to 1}\Big)}_{0} - \underbrace{\frac{1}{x+1}}_{\to 0} = 0$.

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	$+\infty \searrow 0$

g continue sur $]0,+\infty[$, strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0^+$.

En effet si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0^-$ alors $\exists x_0 \in]0,+\infty[$, telle que g serait croissante sur $]x_0,+\infty[$, ce qui est absurde.

g décroît de $+\infty$ à 0^+ donc $\forall x \in]0,+\infty[$, $g(x) > 0$ et, par suite $\forall x \in]0,+\infty[$, $f'(x) > 0$

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$1 \nearrow e$