Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen	A.U 2018/2019 - M.I 1ère année
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 1 - Fiche de T.D n°4

Exercice 1: Soient a, b, c des paramètres réels. On considère les fonctions

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } \ x \leq 0 \\ ax^2 + bx + c & \text{si } \ x > 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \sqrt{x - x^2[x^2]}$$

Étudier la dérivabilité de ces deux fonctions sur leurs domaines respectifs.

Exercice 2: Calculer la dérivée d'ordre n de chacune des fonctions suivantes :

$$R(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \qquad , \qquad M(x) = xe^{ax}$$

Exercice 3: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction ln dans l'intervalle $[n, n+1]$, montrer que

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}.$$

En déduire que la suite

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 4: Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]0, 1[$ avec $f'(x) \neq 0$ sur $]0, 1[$ et $f(0) = 0$. On veut montrer que f ne change pas de signe.

1. En appliquant le théorème des accroissements finis sur $[0, 1]$, montrer que $f(1) \neq 0$.
2. Supposons que $f(1) > 0$ et qu'il existe $x_0 \in \,]0, 1[$ tel que $f(x_0) < 0$. Montrer alors qu'il existe $x_1 \in \,]0, 1[$ tel que $f(x_1) = 0$.
3. En appliquant de nouveau le théorème des accroissements finis dans $[0, x_1]$, montrer qu'on aboutit à une contradiction avec les hypothèses, puis conclure.
4. Refaire le même travail avec $f(1) < 0$.(Facultatif)

Exercice 5: A l'aide de la formule de Taylor-Lagrange, montrer que $\forall x \geq 0$ on a

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1+x)^3} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

Exercice 6: Étudier puis tracer le graphe de la fonction donnée par

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{|x|}\right)^{|x|}$$